PC Lycée Pierre Corneille 2025/2026

Programme de colle de mathématiques
Semaine 16 - Du 2 au 7 Février 2026

XII. Espaces préhilbertiens

- Produit scalaire. Produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Orthogonalité : vecteurs, famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels. Théorème de Pythagore.
- Bases orthonormales. Procédé d'othonormalisation de Gram-Schmidt. Expression des coordonnées, du produit scalaire dans une base orthonormale.
- Orthogonal d'une partie de E, d'un sous-espace vectoriel de E. Si F de dimension finie $F \underset{\perp}{\oplus} = E$.
- Projection orthogonale. Méthodes de calculs : (1) expression dans une base orthonormale, (2) caractérisation $u - p_F(u) \perp F$.
  Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E.

XIII. Théorèmes d'échange de symboles

- Théorème de convergence dominée.
- Intégration terme à terme.
- Intégrales à paramètres : continuité, convergence dominée à paramètre continu, classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie $F \oplus F^\perp = E$.
- Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan
  $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ 2x - y + z = 0\}$.
- Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(\,P \,|\, Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 2x\}$. Déterminer $F^\perp$ et $(3,4)^\perp$.
- Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose $u = (1,-1,2,0)$, $v = (0,1,2,0)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer une base de $F^\perp$.
- Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et p l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que p est un projecteur orthogonal.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $u = (1,2,3)$ sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F.
- **A retenir**. Soit E un espace préhilbertien et u un vecteur non nul.
  - -a- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(a)$.
  - -b- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\,P \,|\, Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,2,3)$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$. Calculer la distance de u à F.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\,P \,|\, Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.
- Un grand classique. Déterminer les valeurs de (a,b,c) telles que $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$ est minimale.
- Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.
- On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g. Calculer la limite de g en $+\infty$.
- On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier :
  $$\hat{f} : x \mapsto \hat{f}(x) = \int_{\infty}^{+\infty} f(t) e^{\mathrm{i}\,tx} dt$$
  est continue sur $\mathbb{R}$.

- On pose $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g. *Exemple où la domination doit se faire sur* $[a,+\infty[$ *ou* $[a,b]$
- **Exemple fondamental**. Pour $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. *Exemple où la domination doit se faire sur* $[a,b]$
- Montrer que $f:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire une expression simple de $f(x)$. On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire, qu'on résoudra. *On pourra utiliser librement que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- Montrer que $g:x\mapsto\displaystyle\int_0^1\sin(tx)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.