Chapitre
Interversion de symboles sur les intégrales généralisées

Dans tout ce chapitre les fonctions considérées sont continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Théorème de convergence dominée

Théorème (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles ou complexes. On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I
- f est continue par morceaux sur I
- il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad \textbf{(hypothèse de domination).}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

⚠ **Attention** ⚠ Il est indispensable que φ soit indépendant de n dans l'hypothèse de domination.
NB : il n'est pas nécessaire de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto f_n(x,t)$ sur J, elle découle de l'hypothèse de domination.

Exemples

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

⚠ **Attention** ⚠ L'hypothèse de domination est indispensable. Contre-exemple : $f_n(x) = n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $[0,1]$.

Exercice Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Objectif : se ramener à une intégrale sur un intervalle dont les bornes ne dépendent pas de n.
On considère l'intégrale sur $[0, +\infty[$ avec une bonne fonction f_n.
Parfois, un changement de variable permet de ne plus avoir de borne qui dépend de n.

II Intégration terme à terme

Théorème (de convergence dominée)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles ou complexes. On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S
- S est continue par morceaux sur I
- la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors, S est intégrable sur I et

$$\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Exemples

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

2) Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

✎ **En pratique** ✎ Quand la série $\sum \int_I |f_n|$ diverge, on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle. Il reste alors la possibilité d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles ou à la suite des restes.

Exemple Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t} = \ln 2$.

III Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans toute cette section, on pose

- I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$
- $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$.

Le but est d'étudier la régularité de la fonction

$$g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention** ⚠ La régularité de $x \mapsto f(x,t)$ ne suffit pas à conclure !!

Exemple On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et n'est pas continue en 0.

Comme on va le voir dans les théorème qui viennent, en plus des hypothèses naturelles et facilement mémorisables, on ajoutera une hypothèse cruciale : **l'hypothèse de domination**.

III.1 Continuité

Théorème (Continuité)

On suppose :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction positive φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

⚠ **Attention** ⚠ Il est indispensable que φ soit indépendant de x dans l'hypothèse de domination.

NB : il n'est pas nécessaire de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur J, elle découle de l'hypothèse de domination.

Exemples

1) On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g.
2) On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier :

$$\hat{f} : x \mapsto \hat{f}(x) = \int_{\infty}^{+\infty} f(t) e^{\mathrm{i}\,tx} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

✎ **En pratique** ✎ L'hypothèse de domination sur I peut être remplacée par une hypothèse de domination **sur tout segment K inclus dans** I (ou d'autres intervalles adaptés).
En effet, le théorème de continuité prouve alors la continuité de g sur tout $K \subset I$ et donc la continuité sur I.

Exemples

1) On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g.
2) **Exemple fondamental**. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.2 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

La continuité concerne l'étude de la fonction en un point en lequel elle est définie. On peut vouloir étudier la fonction en une borne (ouverte) de son intervalle de définition. Pour cela, on dispose de la généralisation suivante :

Théorème (de convergence dominée à paramètre continu)

Soit $a \in I$ ou une borne de I (événtuellement $+\infty$ ou $-\infty$).
On suppose :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J
- pour tout $t \in J$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l(t)$ (limite finie).
- $t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J
- il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination).}$$

Alors, l est intégrable sur J et

$$\lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J l(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right)\,\mathrm{d}t$$

NB: on remarque que ce théorème étend le théorème de convergence dominée au cas $x \to a$ au lieu de $n \to +\infty$.

✎ **En pratique** ✎ L'hypothèse de domination sur I peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de a.

Exemple On pose $g(x,t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de g. Puis la limite en 0_+ et en $+\infty$.

III.3 Classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$

Dérivée partielle et notation $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

Soit $F : (x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0) \in A$, et on suppose que $x \mapsto F(x,y_0)$ est définie au voisinage de x_0. Si cette fonction est dérivable en x_0 on dit que F admet une dérivée partielle en x_0 que l'on note $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Exemple : $F(x,y) = \cos(x^2 y)\,\mathrm{e}^y$.

Théorème (Classe $\mathcal{C}^1$)

On suppose :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- il existe une fonction positive φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention** ⚠ : on n'oublie pas de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur J. En revanche inutile de prouver celle de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, elle découle de l'hypothèse de domination.

✎ **En pratique** ✎ L'hypothèse de domination sur I peut être remplacée par une hypothèse de domination **sur tout segment** K **inclus dans** I (ou d'autres intervalles adaptés).

Exemple

1) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire une expression simple de $f(x)$. On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire, qu'on résoudra. *On pourra utiliser librement que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème (Classe $\mathcal{C}^k$)

On suppose :

- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
- pour tout $x \in I$, tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
- il existe une fonction positive φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec,

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \forall x \in I, \quad g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

NB : on n'oublie pas de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ pour $i \in [\![0, k-1]\!]$. En revanche inutile de prouver celle de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$, elle découle de l'hypothèse de domination.

✎ **En pratique** ✎ Là aussi, l'hypothèse de domination sur I peut être remplacée par une hypothèse de domination **sur tout segment** K **inclus dans** I (ou d'autres intervalles adaptés).

Exemples

1) **Exemple fondamental**. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

IV Quelques conseils pratiques

- **Il faut connaître par coeur** les hypothèses de tous les théorèmes :
  - il y a les hypothèses "naturelles", faciles à retenir (continuité par morceaux, intégrabilité, continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^k$)
  - il y a l'hypothèse cruciale de domination ou de convergence de $\sum \int_I |f_n|$ selon le théorème.
- Bien vérifier les hypothèses, et surtout détecter lorsqu'elles ne sont pas vérifiées pour opter ensuite pour la bonne stratégie.
- Vérifier rapidement les hypothèses de régularité, pour concentrer votre énergie sur l'hypothèse de domination ou $\sum \int_I |f_n|$ converge.
- Commencer par donner un nom à la fonction intégrer, idéalement f pour que ce soit la notation du cours.
- Utiliser la notation "petite flêche" pour les hypothèses de régularité : $t \mapsto f(x,t)$..... $x \mapsto f(x,t)$......
- Penser, en cas de difficultés à dominer sur J, à vous rabattre sur la "domination sur tout segment de J"
- **Erreur à bannir** Remplacer l'hypothèse $\sum \int_I |f_n|$ converge par $\sum \int_I f_n$ converge.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$?)

Le programme propose deux théorèmes, lequel utiliser?

- Si on s'intéresse à une suite d'intégrales sur un ouvert, ou un semi-ouvert (et pas un segment) on n'a pas le choix.
- Si on s'intéresse à une suite d'intégrales sur **un segment**, tout dépend de la suite de fonctions.
  - S'il est plus simple de prouver la convergence uniforme
  - S'il est plus simple de dominer la suite de fonctions par une fonction intégrable.

- Théorème de convergence dominée pour un intervalle quelconque.
- Théorème d'intégration d'une suite convergeant uniformément **sur un segment**.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right) = \int_I \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$?)

Le programme propose deux théorèmes, un troisème le cas échéant. Lequel utiliser?

- Si on s'intéresse à une série d'intégrales sur un ouvert, ou un semi-ouvert (et pas un segment) on n'a pas le choix,

  ou cas échéant si la série $\sum \int_I |f_n|$ diverge
- Si on s'intéresse à une série d'intégrales sur **un segment**, tout dépend de la série de fonctions.
  - **Le plus souvent.** Il est plus simple de prouver que la série converge normalement (ou seulement uniformément)
  - **Plus rarement.**

- Théorème d'intégration terme à terme
- Cas échéant le théorème de convergence dominée appliquée à la suite des sommes partielles ou la suite des restes.
- Théorème d'intégration d'une série de fonctions convergeant uniformément **sur un segment**.