Chapitre
Endomorphismes remarquabes des espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre E est un espace vectoriel **euclidien** soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** muni du produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$.

I Isométries vectorielles

I.1 Définition et caractérisations

Définition (Isométrie vectorielle)

Un endomorphisme f de l'espace euclidien E est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme i.e. :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathrm{O}(E)$.

Exemples

1) Id_E et, $-\mathrm{Id}_E$ sont des symétries vectorielles.
2) Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.
   Cas particulier des **réflexions** : symétries vectorielles par rapport à un hyperplan.
3) Une projection orthogonale n'est (en général) pas une isométrie.

Théorème (Caractérisation par la conservation du produit scalaire)

Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si, et seulement si, il conserve le produit scalaire i.e. :

$$\forall (x, y) \in E, \quad (\, f(x) \,|\, f(y)\,) = (\, x \,|\, y\,)\,.$$

Exercice Soit a un vecteur de norme 1 d'un espace euclidien E. On pose $s : x \mapsto x - 2(x|a)a$.
Montrer que s est une isométrie vectorielle. Reconnaissez-vous cette isométrie?

Théorème (Caractérisation par l'image d'une base orthonormée)

Soit f un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle de E

(ii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée

(iii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée.

I.2 Propriétés des isométries

Théorème-Définition (Groupe-Orthogonal)

- Soient f, g deux isométries vectorielles de E. Alors :
  1) f est un automorphisme de E et f^{-1} est une isométrie vectorielle
  2) $f \circ g$ est une isométrie vectorielle de E.
- Autrement dit, $\mathrm{O}(E)$ est un sous-ensemble du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$, stable par composition et par passage à la réciproque. On l'appelle **groupe orthogonal de** E. Les éléments de $\mathrm{O}(E)$ sont parfois appelés **automorphismes orthogonaux**.

Proposition (Valeurs propres réelles d'une isométrie)

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Si λ est une valeur propre **réelle** de f alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.
Attention : f peut aussi admettre des valeurs propres complexes non réelles.

Théorème (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Alors :

- $F^\perp$ est stable par f
- De plus, les endomorphismes induits par f sur F et $F^\perp$ sont encore des isométries.

II Matrices orthogonales

II.1 Définitions et premières caractérisations

Définition (Matrice orthogonale)

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.

Théorème (Caractérisation des matrices orthogonales)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) M est une matrice orthogonale;

(ii) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$;

(iii) $MM^T = I_n$ ou $M^TM = I_n$;

(iv) les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$.

Exemple

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

2) Déterminer a, b, c, d, e, f tels que $A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ a & c & e \\ a & 0 & f \end{pmatrix}$ soit orthogonale.

Corollaire (Inversibilité d'une matrice orthogonale)

Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

Exemple L'inverse de $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ qui est orthogonale est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

II.2 Caractérisations

Théorème (Caracérisation comme matrice de passage entre bases orthonormée)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{C}$ une autre base de E. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est une base orthonormée si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Théorème (caractérisation matricielle d'une isométrie vectorielle)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
f est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ orthogonale.

Exercice Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / 2x + y - z = 0\}$.
Déterminer la matrice de la réflexion par rapport à F.

II.3 Propriétés des matrices orthogonales

Théorème-Définition (Groupe orthogonal d'ordre n)

- Soient M, N deux matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors :

  1) $M^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 2) $MN \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

- Autrement dit, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par produit et par inverse. On l'appelle **groupe orthogonal d'ordre** n.

Proposition (Déterminant d'une matrice orthogonal)

Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$.

⚠ **Attention** ⚠ Une matrice A tel que $\det(A) = \pm 1$ n'est en général pas une matrice orthogonale. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple Que vaut le déterminant d'une réflexion orthogonale ?

Définition (Groupe spécial orthogonal)

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant vaut 1.

Théorème-Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n)

- Soient M, N deux matrices $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Alors :

  1) $M^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 2) $MN \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

- Autrement dit, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, stable par produit et par inverse. On l'appelle **groupe orthogonal d'ordre** n.

II.4 Orientation

Théorème-Définition (Orienter un espace euclidien)

- Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées.
  Deux cas :
  - ou bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, alors on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont **même orientation**
  - ou bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$ alors on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont **d'orientation contraire**.
- **Orienter un espace euclidien** c'est choisir l'une de ses bases orthonormales comme base de référence. Toutes les bases orthonormales de même orientation que celle-ci sont alors dites orthonormales **directes**, les autres orthonormales **indirectes**.

III Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette section E désigne un plan euclidien orienté.

Théorème (Matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$)

- Soit $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à 2π près) tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
  On note $R(\theta)$ cette matrice.
- Soit $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à 2π près) tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Propriétés ($\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif)

- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \qquad R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
- **Conséquence** : $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif. C'est-à-dire

$$\forall (M, N) \in (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}))^2, \qquad MN = NM.$$

Théorème-Définition (Caractérisation des éléments de $\mathrm{SO}(E)$: rotations vectorielles planes)

Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$.

- Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à 2π près) tel que, dans **toute** base orthonormale directe de E, la matrice de f est $R(\theta)$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $(\, x \mid f(x)\,) = \cos\theta \|x\|^2$. θ est une mesure de l'angle entre x et $f(x)$.
- On dit que f est la **rotation d'angle** θ.

Exemple Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Décrire f.

Théorème-Définition (Caractérisation des éléments de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$: réflexions)

Soit $f \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$.
Alors f est une réflexion c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, ici la droite $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Corollaire (Caractérisations des éléments de $\mathrm{O}(E)$)

Toute isométrie est soit une rotation, soit une réflexion.

Exercice

1) Que dire de la composée de deux rotations? De la composée de deux réflexions?
2) Montrer que toute rotation est la composée de deux symétries.

IV Endomorphismes autoadjoints

IV.1 Définitions et premières propriétés

Définition (Endomorphisme autoadjoint)

Un endomorphisme f de l'espace euclidien E est dit **autoadjoint** s'il vérifie

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ leur ensemble.

NB : note du programme officiel : "on mentionne aussi la terminologie endomorphisme symétrique, tout en lui préférant celle d'endomorphisme autoadjoint".

Exemple L'application identité, Id_E, et plus généralement les homothéties de E, $\lambda \mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des endomorphismes autoadjoints.

Proposition

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints, $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Théorème (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit p un projecteur de E.
Alors p est est un projecteur orthogonal si et seulement si il est autoadjoint.

Exemple Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Monter que f est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.

Théorème (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints)

Soient f un endomorphisme de l'espace euclidien de E et $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E.
On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors
$$f \text{ autoadjoint} \Leftrightarrow A^\top = A.$$

⚠ **Attention** ⚠ L'hypothèse **base orthonormée** est importante. En général, si $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée

- la matrice d'un endomorphisme autoadjoint n'est pas symétrique
- si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique alors f n'est pas nécessairement autoadjoint.

Exemple Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ et $f : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$. f est un endomorphisme autoadjoint. Sa matrice dans la base canonique n'est pas symétrique (car la base canonique n'est pas orthonormale)

Pour la démonstration du théorème on a besoin de ces deux lemmes, qui peuvent être utiles dans d'autres situations.

Lemme (1 - Expression de $(f(x)|y)$)

Si f est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E et M sa matrice dans une base orthonormée, alors
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = X^\top M Y \qquad \text{où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Lemme (2 - Caractérisation d'une matrice nulle)

L'unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})^2, \quad X^\top M Y = 0$$
est la matrice nulle.

IV.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints

L'objectif de ce paragraphe est de d'obtenir le très important **"théorème spectral"** stipulant la diagonalisabilité des endomorphismes autoadjoints, et des matrices symétriques.

Proposition (Orthogonalité des sous-espaces propres)

Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.
Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

La démonstration du théorème spectral se fait par récurrence. L'hérédité nécessite le résultat suivant.

Proposition (Stabilité de sev par un endomorphisme autoadjoint)

Soient f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- l'espace $F^\perp$ est stable par f
- les endomorphismes induits par f sur F et $F^\perp$ sont autoadjoints.

Pour amorcer la récurrence, on a besoin de choisir un sous-espace propre de f et de s'assurer que f admet au moins une valeur propre. La proposition suivante est utile.

Proposition

Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.
Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Théorème spectral : diagonalisation des endomorphismes autoadjoints)

Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.
Alors f est **diagonalisable dans une base orthonormée**, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Théorème (Théorème spectral : diagonalisation des matrices symétriques réelles)

Soit A une matrice symétrique réelle.
Il existe une **matrice orthogonale** $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^\top AP = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que A est diagonalisable. La diagonaliser dans le cas $a = -2$, $b = 1$.

⚠ **Attention** ⚠ Ce résultat ne s'applique qu'aux matrices symétriques **réelles**. Par exemple, la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
En effet :

IV.3 Endomorphismes autoadjoints positifs

Définition (Endomorphismes autoadjoints positifs)

Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.

- On dit que f est **positif** si : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) \geqslant 0$.
  On note $\mathcal{S}^+(E)$ leur ensemble.
- On dit que f est **défini-positif** si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ (f(x)|x) > 0$.
  On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ leur ensemble.

Exercice - A savoir refaire. Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E. On note a sa plus petite valeur propre.
Montrer que : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) \geqslant a\|x\|^2$.

✎ **En pratique** ✎ *L'égalité* $(f(x)|x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ *ou sa version matricielle* $X^\top MX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ *rencontrée en cours de route est très utile dans de nombreux exercices et à savoir redémontrer.*

Théorème (Caractérisation spectrale)

Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.

- f est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
- f est défini-positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Définition (Matrices symétriques positives)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- On dit que A est **positive** si : $\quad \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0.$
  On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ leur ensemble.
- On dit que A est **définie-positive** si : $\quad \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n1}\},\ X^\top AX > 0.$
  On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ leur ensemble.

Théorème (Caractérisation spectrale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice matrice symétrique.

- A est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
- A est définie-positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'où le lien immédiat entre ces deux notions.

Théorème (Equivalence matrices/endomorphisme positifs)

Soient f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$f \text{ positif (resp. défini-positif)} \Longleftrightarrow A \text{ positive (resp. définie-postive)}.$$

Exercice

1) A quelles conditions sur a, b réels la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est-elle symétrique définie positive?

2) Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif. Montrer que tout endomorphisme autoadjoint positif f peut s'écrire $f = g^2$ où g est aussi un endomorphisme autoadjoint positif.