Chapitre
Topologie et continuité dans les espaces vectoriels normés

Rappels

Si $(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, on rappelle $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est une application vérifiant :

1) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ **(séparation)**
2) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ **(homogénéité)**
3) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**inégalité triangulaire**).

Normes usuelles à connaître. Quelles sont les normes usuelles connues sur les espaces vectoriels suivants?

- Sur $\mathbb{K}^n$.

- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- Sur un espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$.

On rappelle les définitions :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r,
  $B(a, r) = \{x \in E \,/\, d(a, x) < r\} = \{x \in E \,/\, \|x - a\| < r\}$
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r,
  $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \,/\, d(a, x) \leqslant r\} = \{x \in E \,/\, \|x - a\| \leqslant r\}$
- la **sphère** de centre a et de rayon r, $S(a, r) = \{x \in E \,/\, d(a, x) = r\} = \{x \in E \,/\, \|x - a\| = r\}$.

Résultats utiles qu'il est bon de revoir.

- Normes équivalentes, équivalence des normes en dimension finie.
- Définition de la convergence d'une suite à valeurs dans un evn. Equivalence avec la convergences des coordonnées dans un evn de dimension finie. Application aux suites convergentes de matrices et la convergence des suites des coefficients.

I Topologie d'un espace vectoriel normé

Sauf mention contraire, E désigne un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

I.1 Parties ouvertes

Définition (Point intérieur à une partie - Intérieur d'une partie)

Soit A une partie de E.

- Soit $x \in A$. On dit que x est **intérieur à** A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$ soit :

$$\exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A.$$

- L'**intérieur de** A est l'ensemble des points intérieurs à A. On le note $\mathring{A}$.

Exemples

1) **A retenir** Les éléments intérieurs à A sont éléments de A. Autrement dit $\mathring{A} \subset A$.
2) On considère $E = \mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$ (valeur absolue). Quel est l'intérieur de $[0,1[$?

Théorème-Définition (Ouvert)

Soit U une partie de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\forall x \in U, \quad \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset U$

(ii) $U = \mathring{U}$ (c'est-à-dire tous les points de U sont intérieurs à U).

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que U est une partie ouverte ou un ouvert de E.

Exemples

1) On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose

$$U_1 = \{(x,y) \ / \ x > 0\} \qquad\qquad U_2 = \{(x,y) \ / \ x \geqslant 0\}.$$

U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais pas U_2.

2) E et $\emptyset$ sont ouverts.

Proposition (Boule ouverte)

Toute boule ouverte est un ouvert de E.

NB : Une boule fermée n'est pas ouverte.
Exemple Les intervalles ouverts $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

Théorème (Stabilité par intersection/réunion)

1) Toute union **quelconque** d'ouverts est un ouvert.
2) Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

⚠ **Attention** ⚠ Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert. Contre-exemple :

I.2 Parties fermées

Définition (Point adhérent à une partie - Adhérence d'une partie)

Soit A une partie de E.

- Soit $x \in E$. On dit que x est **adhérent à** A si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ est non vide soit :

$$\forall r > 0, \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

- L'**adhérence de** A est l'ensemble des points adhérents à A. On le note $\overline{A}$.

Exemples

1) **A retenir**. Tout élément de A est adhérent à A. Autrement dit $A \subset \overline{A}$.
2) On considère $E = \mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$ (valeur absolue). Quel est l'adhérence de $[0,1[$?

NB : on définit aussi la frontière d'une partie A de E par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
Par exemple la frontière d'une boule (ouverte ou fermée) est la sphère.

Théorème (Caractérisation séquentielle d'un point adhérent)

Soient A une partie de E et $x \in E$.
x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Définition (Fermé)

Soit F une partie de E. F est dite fermée si elle est égale à son adhérence.

Théorème (Caractérisation séquentielle des fermés)

Soit F une partie de E.
F est un fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, $\lim x_n \in F$.

Exemples On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose

$$U_2 = \{(x,y) \;/\; x \geqslant 0\} \qquad U_3 = \{(x,y) \;/\; 3x^2 + 2y > 0\}$$

U_2 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et U_3 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème

Une partie F de E est fermée (resp. ouverte) si et seulement si son complémentaire est ouvert (resp. fermée).

Exemple E et $\emptyset$ sont fermés.

Proposition (Boule fermée)

Toute boule fermée, toute sphère est un fermé de E.

Exemple Les segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. En particulier les singletons $\{a\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Théorème (Stabilité par intersection/réunion)

1) Toute union **finie** de fermés est un fermé.

2) Toute intersection **quelconque** de fermés est un fermé.

⚠ **Attention** ⚠ Une union quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé. Contre-exemple :

Exemple La frontière d'une partie A de E est un fermé de E.

I.3 Parties denses

Définition (Partie dense)

Soit A une partie de E.
On dit que A est **dense** dans E si $\overline{A} = E$, autrement dit, si tout élément de E est adhérent à A.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit A une partie de E.
A dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de E.

Exemples

1) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.4 Invariance des notions topologiques

Théorème (Invariance par équivalence de normes)

Soient N_1 et N_2 deux normes **équivalentes** sur un espace vectoriel E et soit A une partie de E.
Alors A est une partie ouverte (resp. fermée) (resp. dense) pour N_1 si et seulement si elle est ouverte (resp. fermée) (resp. dense) pour N_2.

Corollaire (En dimension finie)

Les caractères ouvert, fermé, dense ne dépendent pas de la norme choisie.

Démo :

☞ **Explication** ☜ Cela légitime des assertions du type : "$]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$", "U est ouvert de $\mathbb{R}^2$", "$\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$", "$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$" sans préciser la norme utilisée sur l'espace vectoriel.

II Limites et continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

II.1 Limites et continuité en un point

Définition (Limite et continuité en un point)

Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ une application et a un point de E adhérent à A.
Soit l un élément de F.
On dit que f **admet pour limite** l **en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Théorème (Unicité de la limite)

Avec les même notations que précédemment. La limite de f en a, si elle existe, est unique.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

Avec les mêmes notations que précédemment.
f admet pour limite l en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exemple Soit f définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Théorème (Limite et applications coordonnées)

On suppose que F est de dimension finie; soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F.
Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ et a un point de E adhérent à A.
On note $(f_1, \ldots, f_p)$ les applications coordonnées de f c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i.$$

Soit $l \in F$, de coordonnées $(l_1, \ldots, l_p)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Alors f admet pour limite l en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i admet pour limite l_i en a et dans ce cas

$$\lim_a f = \sum_{i=1}^{p} l_i e_i.$$

Théorème (Limite d'une combinaison linéaire)

Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ et $g : A \to F$ deux applications admettant pour limites respectives l et l' en un point a adhérent à A.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lim_a (\lambda f + g) = \lambda l + l'.$$

Théorème (Limite d'un produit)

Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ et $u : A \to \mathbb{K}$ deux applications admettant pour limites respectives l et α en un point a adhérent à A.
Alors

$$\lim_a (ug) = \alpha l.$$

Théorème (Limite d'une composition)

Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé et

- A une partie non vide de E, B une partie non vide de F
- $f : A \to B$, $g : B \to G$ deux applications
- a un point adhérent à A, b un point adhérent à B
- $l \in G$.

On suppose que

$$\lim_a f = b \qquad\qquad \lim_b g = l.$$

Alors

$$\lim_a (g \circ f) = l.$$

Théorème-Définition (Continuité en un point A)

Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ une application et a **un élement de** A.
Si f admet une limite l en A alors $b = f(a)$ et f **est dite continue en** a, on a alors

$$\lim_a f = f(a).$$

Exemples

1) Les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues en tout $(x_0, y_0) \in R^2$.
2) Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. L'application i-ème coordonnée $x \mapsto x_i$ (la i-ème coordonnée de x dans la base $\mathcal{B}$) est continue en tout $a \in E$.

Théorème (Caractérisation de la continuité par les applications coordonnées)

Si F est de dimension finie. L'application $f : A \to F$ est continue en $a \in A$ si ses applications coordonnées dans une base quelconque le sont.

Exemples L'application $(x, y) \mapsto (\cos(x^2 y), \mathrm{e}^{x+2y}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1})$ est continue en tout (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité)

L'application $f : A \to F$ est continue en $a \in A$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

II.2 Continuité sur une partie

Définition (Continuité sur une partie)

Une application définie sur une partie A est **continue sur** A si elle est continue en tout point de A.

Exemples

1) Les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

2) Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. L'application i-ème coordonnée $x \mapsto x_i$ (la i-ème coordonnée de x dans la base $\mathcal{B}$) est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Opération, composition)

1) Si $f : A \to F$ et $g : A \to F$ sont deux applications continues sur une partie A de E alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g$ est continue sur A.
2) Si $f : A \to F$ et $u : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues sur une partie A de E alors uf est continue sur A.
Si de plus u ne s'annule pas alors $\dfrac{1}{u}f$ est continue sur A.
3) Si $f : A \to B$ et $g : B \to G$ sont deux applications respectivement continues sur une partie A de E et une partie B de F alors $g \circ f$ est continue sur A.

Méthode (Le cas des fonctions de deux variables)

- Pour calculer une limite on peut faire usage de majoration, ou passer en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
- Pour montrer la non existence de limite on étudie la limite sur des chemins :$f(x,0)$, $f(0,y)$, $f(x,x)$, $f(x,\lambda x)$....

Exemples

1) Soit f l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Etude de la continuité de f.
2) Soit f l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Etude de la continuité de f.
3) Soit f l'application définie par $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(ny)x^n}{\sqrt{n}}$. Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Ouvert, fermé - Continuité)

Soit $f : E \to F$ une application continue sur E.

- Si A est un ouvert de F alors $f^{-1}(A)$ est un ouvert de E.
- Si A est un fermé de F alors $f^{-1}(A)$ est un fermé de E.

Corollaire

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur E.

- $\{x \in E \;/\; f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in E \;/\; f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.
- $\{x \in E \;/\; f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

Exemples

1) L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) On considère le domaine T de $\mathbb{R}^2$ délimité par les côtés du triangle de sommet $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ (frontière comprise). Montrer que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Définition (Application lipschitzienne)

Soit A une partie de E et $f : A \to F$.
On dit que f est lipschitzienne sur A, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E.$$

Théorème (Lipschitzienne $\Rightarrow$ continue)

Toute application lipschtizienne est continue.

Exemple L'application $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur E.

Théorème-Définition (Continuité des applications polynomiales)

- Soit A une partie de E. Une application $f : A \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que l'expression de $f(x)$soit un polynôme en les coordonnées de x exprimées dans la base $\mathcal{B}$.
- Toute fonction polynomiale est continue.

Exemple - À connaître - Le déterminant, la trace sont des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
Application : l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.3 En dimension finie

Théorème (Continuité des applications linéaires)

On suppose que E est de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors f est lipschitzienne, donc continue sur E.

Exemple à connaître - Applications utiles aux matrices

1) La trace et la transposition sont des applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. L'application $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est continue.
Application utile en probabilité : si la suite des itérées $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L alors $AL = L = LA$ et $L^2 = L$.

3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers une matrice A. Alors pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
$$P^{-1}A_nP \to P^{-1}AP.$$

⚠ **Attention** ⚠ Le résultat est faux si E n'est pas supposé de dimension finie.
Contre-exemple : on considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$. On pose l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f(0)$ et la suite de fonctions (f_n) où f_n est affine sur $[0,1/n]$ puis sur $[1/n,1]$ avec $f_n(0) = 1$, $f_n(1/n) = f_n(1) = 0$.

Théorème (Continuité des applications multilinéaires)

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire, c'est-à-dire une application linéaire par rapport à chacune de ces n variables.
Alors f continue sur E.

Exemples incontournables à connaître

1) Le déterminant est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

2) Un produit scalaire sur un **espace euclidien** est une application continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

3) Le produit matriciel $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \mapsto AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue.
Application utile : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices qui convergent respectivement vers L et M alors $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers LM.

Exemple Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé, borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

On suppose que E est de dimension finie. Soit A une partie non vide, fermée et bornée de E.
Si $f : A \to \mathbb{K}$ est une application continue alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarques

Ce théorème généralise celui connu pour une fonction de la variable réelle. "Toute fonction continue sur un segment (qui est bien fermé et borné) est bornée et atteint ses bornes" (énoncé aussi connu sous la forme "l'image d'un segment par une application continue est un segment").

Application à l'étude d'extrema Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le triangle T de l'exemple vu plus haut. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur T, les déterminer.