Exercice 1. (♡) $\mathbb{R}^4$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice relativement à la base canonique de la réflexion de $\mathbb{R}^4$ par rapport au sous-espace vectoriel d'équation

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Exercice 2. (♡♡) On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $f \in SO(\mathbb{R}^3)$.
2. Vérifier que 1 est valeur propre de f et déterminer le sous espace propre correspondant (que l'on notera D).
3. Déterminer une base orthonormale de $D^\perp$ puis démontrer que ce sous espace est stable par f.
4. Donner la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$.

Exercice 3. (♡) $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto P(-X)$ est une isométrie vectorielle.

Exercice 4. ($*$) Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}_E))^\perp$.
2) Soit $x \in E$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$.

   Après avoir décomposé x suivant $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 5. ($*$) Un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$ est appelé similitude vectorielle s'il existe une isométrie vectorielle g et un réel strictement positif k tel que $f = kg$.

1) Montrer que : si f est une similitude vectorielle, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) \mid f(y)\rangle = 0 \quad \text{(conservation de l'orthogonalité)}.$$

2) On suppose que f est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.
   -a- Montrer que : si deux vecteurs a et b sont unitaires, alors $a + b$ et $a - b$ sont orthogonaux.
   -b- En déduire que, si x et y sont deux vecteurs non nuls, alors $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$.
   -c- Prouver que f est une similitude.

Exercice 6. (♡) Montrer qu'une matrice orthogonale triangulaire supérieure est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ± 1.

Exercice 7. (♡♡) Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que: $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| \leqslant 1$ et que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Indication : pour la deuxième inégalité on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 8. (♡) Soient f_1, f_2 et f_3 les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés respectivement à:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. (♡♡) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : M \mapsto AM^TA$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. (♡♡) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $f : P \mapsto 2XP' + \left(X^2 - 1\right)P''$ est un endomorphisme symétrique.

Exercice 11. (♡) Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables puis les diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. (♡♡) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz$.

1) Déterminer une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour $X = (x, y, z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $f(x, y, z) = X^TAX$.
2) Etudier la signe de f.
3) En s'inspirant de ce qui précède, déterminer l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x^2+2y^2+z^2-2yz+2xz = 0$.

Exercice 13. (♡♡)

1) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec une matrice orthogonale.
2) Trouver le maximum et le minimum de f définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(Pour $X = (x, y, z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pourra calculer ${}^TXAX$).

Exercice 14. (∗∗) Soit E in espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme autoadjoint de E. Nous noterons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses n valeurs propres, éventuellement comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1) Montrer que pour tout $x \in E$,
$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2.$$
2) Montrer que
$$\lambda_n = \max\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \,\middle|\, x \in E \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right\}$$
$$\lambda_1 = \min\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \,\middle|\, x \in E \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right\}$$
3) Soit e_1' un vecteur propre pour la valeur propre λ_1. Montrer que
$$\lambda_2 = \min\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \,\middle|\, x \in E, x \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, e_1'\rangle = 0 \right\}$$

Exercice 15. $(*)$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Exercice 16. $(*)$ Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 17. $(*)$- Décompostion polaire
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1) Déduire de l'exercice précédent qu'il existe une unique matrice S symétrique définie positive telle que $A^\top A = S^2$.
2) En déduire qu'il existe une unique matrice $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice S symétrique définie positive telles que $A = OS$.

Exercice 18. $(\heartsuit)$- $(*)$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

1) $(\heartsuit)$Démontrer qu'il existe une matrice B symétrique positive telle que $B^2 = A$.
2) Démontrer que, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, l'unique matrice symétrique positive $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \lambda \mathrm{I}_d$ est $M = \sqrt{\lambda}\mathrm{I}_d$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, et d_k la multiplicité de la valeur propre λ_k. On sait qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$P^\top A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \mathrm{I}_{d_p} \end{bmatrix}$$
(matrice diagonale par blocs). On choisit une matrice B symétrique positive telle que $B^2 = A$ et on pose $C = P^\top B P$.
3) Démontrer que la matrice C est diagonale par blocs, le k-ème bloc C_k étant de taille d_k.
4) Démontrer que, pour tout $k \in [1, p]$, on a $C_k = \sqrt{\lambda_k}\mathrm{I}_{d_k}$. En déduire qu'il existe une unique matrice B symétrique positive telle que $B^2 = A$.

Exercice 19. $(*)$ Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathcal{O}(E)$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.
2) En déduire que si $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 20. $(*)$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M^\top = M^2$. Montrer que M est orthogonale.
Indication : on commencera par prouver $M^3 = I_3$

Exercice 21. $(*)$ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer M^2.

Exercice 22. $(*)$ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. On pose $B = A^2 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 23. $(*)$ Soit E un espace euclidien de dimension au moins $2, a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha(x|a)a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2) Éléments propres :
   -a- Montrer que a est un vecteur propre de f.
   -b- Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé?

-c- Donner une matrice de f dans une base de vecteurs propres.

3) Que représente l'endomorphisme $x \mapsto \langle x, a\rangle a$ de E ?
4) Pour quelles valeurs de αf est-il une isométrie? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.
5) Soit a et b deux réels, et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M soit une matrice orthogonale. Décrire l'endomorphisme associé.

Exercice 24. $(*)$
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!], a_{ii} \geqslant 0$.
2) Si $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $a_{ii} = 0$, montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!], a_{ij} = 0$.
3) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 25. $(*)$ Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons Φ_A l'application :

$$\Phi_A : (X, Y) \in E^2 \mapsto X^\top AY \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que Φ_A est bilinéaire.
2) Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.
3) Montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $i \neq j, a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.
5) Si A est symétrique réelle, justifier qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$. Écrire $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 26. $(**)$ Soient f, g deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E. Démontrer que l'endomorphisme $f \circ g$ est autoadjoint si, et seulement si, f et g commutent.

Exercice 27. $(**)$ Soient f, g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise à la fois f et g.