Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. (♡) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 2. $(*)$ Soit f une fonction continue strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2.$$

Étudier les cas d'égalité.

Produit scalaire - Projection orthogonale - Distance

Exercice 3. (♡♡)
$\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel. On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.

1) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$. *On peut éviter d'utiliser le procédé de Gram-Schmidt.*
2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F^\perp$.
3) En déduire la matrice de la projection orthogonale sur F.
4) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, -1, 1, 2)$.

Exercice 4. (♡) Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Montrer p est une projection orthogonale dont on déterminera l'élément caractéristique.

Exercice 5. (♡♡) Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit u un vecteur unitaire de E, on pose $D = \mathrm{Vect}(u)$.

1) Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur D est $UU^\top$ où $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
2) En déduire la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur $P = D^\perp$.
3) Application: dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.

Exercice 6. (♡♡) Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, on pose $(P|Q) = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2)$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Calculer la distance X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ par les deux méthodes du cours.

Exercice 7. $(*)$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et les $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Rappeler l'expression du polynôme P_j vérifiant :

$$\forall i \in [\![0n]\!], \quad P_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Ce sont des polynômes interpolateurs de Lagrange. On rappelle ce résultat d'algèbre linéaire : $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base $\mathbb{R}_n[X]$

3) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Exprimer les coordonnées d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base à l'aide de Q et des x_i.

5) On pose $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \right\}$;

   -a- Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

   -b- Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

   -c- En déduire la distance de Q à H.

Exercice 8. ($\heartsuit\heartsuit$) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(A|B) = \text{Trace}(A^\top B)$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.

2) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Trace}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\text{Trace}(A^\top A)}$.

4) On se place dans le cas $n = 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ et $d(A, \mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 9. ($\heartsuit\heartsuit$) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(A|B) = \text{Tr}(A^\top B)$.
Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \text{Tr}(M) = 0\}$.

1) Déterminer la dimension de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$.

2) En déduire une expression de $p_F(M)$ la projection orthogonale d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur F.

3) Déterminer la distance de la matrice J à F où J est la matrice dont les coefficients valent 1.

Exercice 10. ($\heartsuit\heartsuit$) Calculer le minimum de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^t - (a + b \sin t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 11. ($\heartsuit$)- ($*$)Une famille de polynômes : polynômes de Laguerre
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1) ($\heartsuit$) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) ($\heartsuit$) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

   -a- Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

   -b- En déduire une expression simple de I_n. *Indication : on doit trouver $n!$.*

   -c- Calculer alors $\left(X^i \mid X^j\right)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

3) ($\heartsuit$) **Application 1** : minimiser une intégrale.

   -a- Orthonormaliser la base $(\ 1, X\ )$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

   -b- En déduire la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

   -c- Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 e^{-t} \, \mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

4) $(*)$ **Application 2** : minimiser une autre intégrale.

-a- Soit F le sous espace vectoriel engendré par $(X, \cdots, X^n)$ et Q le projeté orthogonal de 1 sur F; on note $Q = -\sum_{i=1}^{n} a_i X^i$. On pose également $P = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i (X+1)\cdots(X+i)$.
Justifier que $P(k) = 0$ pour tout entier k entre 1 et n.

-b- Montrer que $P = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)\cdots(X-n)$.

-c- Que vaut a_n?

-d- En déduire que $\inf_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \dfrac{1}{n+1}$.

5) $(**)$ **Polynômes orthogonaux** : soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes deux à deux orthogonaux et de norme 1, échelonnée en degrés.

-a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.

-b- Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]0, +\infty[$.
Indication : si on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ les racines de P_n dans $]0,+\infty[$ comptées avec multiplicité, et $Q = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$, on pourra regarder $(Q \mid P_n)$. Bonus : prouver que ces racines sont simples.

Exercice 12. $(**)$ Une famille de polynômes : Polynômes de Legendre

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left(X^n(1-X)^n\right)^{(n)}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est de degré n et que son coefficient dominant est $(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$.
2) Montrer que si $P(0) = P(1) = 0$, alors $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.
4) Montrer que $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercices théoriques

Exercice 13. $(\heartsuit)$ Soit E un espace préhilbertien et a et b deux vecteurs de E.
Montrer que : $[\,\forall x \in E,\ (x|a) = (x|b)\,] \quad \Leftrightarrow \quad a = b$.

Exercice 14. $(**)$ Exemple où $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$

On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On montre que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

1) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.
3) Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$
4) En déduire que $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$.

Exercice 15. $(*)$ Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|\lambda x + y\|^2$.
2) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.

Exercice 16. $(*)$ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) Démontrer que le noyau de A est égal à celui de $A^T A$.
2) En déduire que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T A) = \operatorname{rg}(AA^T)$.
3) Démontrer que les images de A et de $A^T A$ sont égales.

Exercice 17. $(*)$ Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$.
Après avoir prouvé que : $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|y) = -(x|u(y))$, montrer que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

Exercice 18. $(*)$ Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \quad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 19. $(**)$ Soit E un espace préhilbertien.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle$. Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 20. $(**)$Déterminant de Gram
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
On note $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$.
2) On suppose maintenant que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et on pose $F = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
   - -a- On pose $\mathcal{B}$ une base orthonormale de F et $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
     Exprimer $G(x_1, \dots, x_n)$ à l'aide M et $M^\top$.
   - -b- Montrer que $\det(G(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3) Déduire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
4) Soit $x \in E$. Montrer que $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$.