# Convergence dominée

**Exercice 1**. (♡)

1) Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$ de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

**Exercice 2**. (♡) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^n}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**Exercice 3**. (♡)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2) Calculer la limite de la suite $(u_n)$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 4**. $(*)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$. Justifier l'existence de $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^x\,\mathrm{d}t$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**Exercice 5**. $(*)$

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge. On note $I_n$ sa valeur.
2) Démontrer que la suite $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.
3) Démontrer par l'absurde que la série $\sum I_n$ diverge.

# Intégration terme à terme

**Exercice 6**. (♡♡) Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Montrer que $\zeta$ est continue sur $]1;+\infty[$.
2) Montrer que $x \mapsto \zeta(x) - 1$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ et que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

**Exercice 7**. (♡) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ et montrer que cette intégrale est égale à la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$.

**Exercice 8**. (♡) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

**Exercice 9**. (♡) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^{t^2}}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière; exprimer les coefficients.

**Exercice 10.** $(*)$

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$.
2) En déduire l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

# Intégrales à paramètre

**Exercice 11.** $(\heartsuit)$

1) Montrer que $f$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Démontrer que $f$ possède une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.
3) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4) En déduire que, pour tout $x > 0$, $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 2f(1) - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

**Exercice 12.** $(\heartsuit)$ Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ puis $f'(x)$.
3) En déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 13.** $(\heartsuit)$ Soit $g$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t-x} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour $x \geqslant 0$, $f'(x) + f(x) = g(x)$.

**Exercice 14.** $(\heartsuit)$ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et, pour tout $t \neq 0$, $f(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}$.

1) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; étudier ses variations.

**Exercice 15.** $(\heartsuit)$ Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.

1) Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f' + g'$.
2) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 16.** $(\heartsuit)$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$ définie par
$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$.
3) En déduire la valeur de $f$.

**Exercice 17**. (♡) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
   $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x+1)$.
3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

**Exercice 18**. (♡) Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et former une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $g$.
2) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 19**. $(*)$

1) Démontrer que, si $f$ est continue sur $[0;1]$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0;1]$.
2) En déduire les fonctions $f$ continues sur $[0;1]$ telles que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 20**. $(*)$ Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de $f$.
2) Etudier la continuité de $f$ sur son domaine de définition.
3) Etudier la dérivabilité de $f$ sur son domaine de définition.
4) Calculer des équivalents de $f$ aux bornes de son domaine de définition.

**Exercice 21**. $(*)$

1) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$; on note $I$ sa valeur.
2) Soit $x > 0$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. On note $\varphi(x)$ sa valeur.
3) Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $x$.
4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$; en déduire une expression de $\varphi(x)$ en fonction de $x$ pour $x > 0$.
5) Justifier que $F : x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; calculer $F'$.
6) A l'aide d'un changement de variable et du théorème de convergence dominée, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} xe^{-xt}F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
7) En déduire la valeur de $I$.