

XIII. Théorèmes d'échange de symboles

- Théorème de convergence dominée.
- Intégration terme à terme.
- Intégrales à paramètres : continuité, convergence dominée à paramètre continu, classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$.

XIV. Endomorphismes remarquables des ev euclidiens

- Isométries vectorielles. Définitions; caractérisation par conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormée. Propriétés : calculatoires (groupe orthogonal), valeurs propres, stabilité de $F^\perp$ lorsque F l'est.
- Matrices orthogonales. Définitions : matrice dont l'endomorphisme canoniquement associé est une isométrie. Caractérisation : $MM^\top = M^\top M = I_n$,

les lignes/colonnes forment une famille orthonormale. Matrice de passage entre deux bases orthonormales. Propriétés : calculatoires (groupe orthogonal), déterminant : $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation d'un espace euclidien.

- Classification des isométries vectorielles du plan : rotation et réflexion.
- Endomorphismes autoadjoints. Caractérisation matricielle dans une base orthonormée. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Propriétés : expression matricielle de $(f(x)|y)$, stabilité de $F^\perp$ lorsque F l'est, orthogonalité des sous-espaces. Théorème spectral : version endomorphisme, version matrice symétrique réelle.
- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis-positifs. Définitions. Caractérisation matricielle, caractérisation spectrale.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Justifier la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ et la calculer.
- Equivalence entre conservation du produit scalaire et conservation de la norme pour un endomorphisme.
- Pour un endomorphisme, si l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée alors c'est une isométrie.
- Si f est une isométrie et F stable par f alors $F^\perp$ est stable par f .
- Si f est autoadjoint, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
- Si f est autoadjoint, f est positif (resp. défini-positif) ssi $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$).
- Si A est symétrique réelle, A est positive (resp. définie-positive) ssi $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maîtrisés :

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = 0$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1+x^2} dx = 0$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.
- On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g . Calculer la limite de g en $+\infty$.
- On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+x^2t^2} dt$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier :

$$\hat{f} : x \mapsto \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

- On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$. Etudier l'ensemble de définition puis la continuité de g . Exemple où la domination doit se faire sur $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$
- **Exemple fondamental.** Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Exemple où la domination doit se faire sur $[a, b]$
- Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire une expression simple de $f(x)$. On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire, qu'on résoudra. On pourra utiliser librement que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- Montrer que $g : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx) dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Soit a un vecteur de norme 1 d'un espace euclidien E . On pose $s : x \mapsto x - 2(x|a)a$.
Montrer que s est une isométrie vectorielle. Reconnaissez-vous cette isométrie?
- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.
- Déterminer a, b, c, d, e, f tels que $A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ a & c & e \\ a & 0 & f \end{pmatrix}$ soit orthogonale.
- Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$.
Déterminer la matrice de la réflexion par rapport à F .
- Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Décrire f .
- Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
- Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que A est diagonalisable. La diagonaliser dans le cas $a = -2, b = 1$.
- Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E . On note a sa plus petite valeur propre.
Montrer que : $\forall x \in E, (f(x)|x) \geq a\|x\|^2$.
- A quelles conditions sur a, b réels la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est-elle symétrique définie positive?
- Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif. Montrer que tout endomorphisme autoadjoint positif f peut s'écrire $f = g^2$ où g est aussi un endomorphisme autoadjoint positif.