

XIV. Endomorphismes remarquables des ev euclidiens

- Isométries vectorielles. Définitions; caractérisation par conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormée. Propriétés : calculatoires (groupe orthogonal), valeurs propres, stabilité de $F^\perp$ lorsque F l'est.
- Matrices orthogonales. Définitions : matrice dont l'endomorphisme canoniquement associé est une isométrie. Caractérisation : $MM^T = M^T M = I_n$, les lignes/colonnes forment une famille orthonormale. Matrice de passage entre deux bases orthonormales. Propriétés : calculatoires (groupe orthogonal), déterminant : $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation d'un espace euclidien.
- Classification des isométries vectorielles du plan : rotation et réflexion.
- Endomorphismes autoadjoints. Caractérisation matricielle dans une base orthonormée. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Propriétés : expression matricielle de $(f(x)|y)$, stabilité de $F^\perp$ lorsque F l'est,

orthogonalité des sous-espaces.

Théorème spectral : version endomorphisme, version matrice symétrique réelle.

- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis-positifs. Définitions. Caractérisation matricielle, caractérisation spectrale.

XV. Continuité dans les espaces vectoriels normés

- Topologie dans les espaces vectoriels normés. Boules ouvertes, fermées. Parties ouvertes, fermées. Point adhérent. Densité. Caractérisations séquentielles : point adhérent, fermé, densité.
- Continuité. Limite de $f : A \rightarrow F$ en un point adhérent à A , sur A . Lien avec les applications coordonnées. Opérations sur les limites. Ouverts, fermés comme image réciproque. Continuité des applications linéaires, multilinéaires : applications aux suites de matrices. Théorème des bornes atteintes.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Equivalence entre conservation du produit scalaire et conservation de la norme pour un endomorphisme.
- Pour un endomorphisme, si l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée alors c'est une isométrie.
- Si f est une isométrie et F stable par f alors $F^\perp$ est stable par f .
- Si f est autoadjoint, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
- Si f est autoadjoint, f est positif (resp. défini-positif) ssi $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$).
- Si A est symétrique réelle, A est positive (resp. définie-positive) ssi $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).
- Une boule ouverte est ouverte.
- Une boule fermée est fermée.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maîtrisés :

- Soit a un vecteur de norme 1 d'un espace euclidien E . On pose $s : x \mapsto x - 2(x|a)a$. Montrer que s est une isométrie vectorielle. Reconnaissez-vous cette isométrie?
- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.
- Déterminer a, b, c, d, e, f tels que $A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ a & c & e \\ a & 0 & f \end{pmatrix}$ soit orthogonale.
- Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport à F .
- Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Décrire f .
- Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
- Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que A est diagonalisable. La diagonaliser dans le cas $a = -2, b = 1$.
- Soit f un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E . On note a sa plus petite valeur propre. Montrer que : $\forall x \in E, (f(x)|x) \geq a\|x\|^2$.
- A quelles conditions sur a, b réels la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est-elle symétrique définie positive?

- Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif. Montrer que tout endomorphisme autoadjoint positif f peut s'écrire $f = g^2$ où g est aussi un endomorphisme autoadjoint positif.

- On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose

$$U_1 = \{(x, y) / x > 0\} \quad U_2 = \{(x, y) / x \geq 0\}.$$

U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais pas U_2 .

- On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose

$$U_2 = \{(x, y) / x \geq 0\} \quad U_3 = \{(x, y) / 3x^2 + 2y > 0\}$$

U_2 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et U_3 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit f l'application définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Etude de la continuité de f .
- Soit f l'application définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Etude de la continuité de f .
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- On considère le domaine T de $\mathbb{R}^2$ délimité par les côtés du triangle de sommet $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ (frontière comprise). Montrer que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- La trace et la transposition sont des applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est continue.
Application utile en probabilité : si la suite des itérées $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L alors $AL = L = LA$ et $L^2 = L$.
- Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers une matrice A . Alors pour toute matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}A_k P \rightarrow P^{-1}AP.$$

- Le produit matriciel $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \mapsto AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue.
Application utile : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices qui convergent respectivement vers L et M alors $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers LM .
- Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le triangle T de l'exemple vu plus haut. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur T , les déterminer.