XV. Continuité dans les espaces vectoriels normés

- Topologie dans les espaces vectoriels normés. Boules ouvertes, fermées. Parties ouvertes, fermées. Point adhérent. Densité.
  Caracérisations séquentielles : point adhérent, fermé, densité.
- Continuité. Limite de $f : A \to F$ en un point adhérent à A, sur A. Lien avec les applications coordonnées. Opérations sur les limites. Ouverts, fermés comme image réciproque.
  Continuité des applications linéaires, multilinéaires : applications aux suites de matrices. Théorème des bornes atteintes.

XVI. Variables aléatoires (Indépendances, inégalités)

- Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles.
- Variables aléatoires indépendantes. Lemme des coalitions. Suite iid.
- Formule de transfert pour le calcul de $E(f(X,Y))$. Espérance $E(XY)$ pour des variables aléaoires indépendantes, extension au cas de n variables aléatoires.
- Fonction génératrice $G_{X+Y} = G_X G_Y$ pour des variables aléatoires indépendantes. Stabilité de la loi binomiale/Poisson pour la somme.
- Covariance, propriétés. Variance d'une somme de deux/de n variables aléaoires. Cas des variables aléatoires deux à deux indépendantes.
- Inégalités probabilités : Markov, Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Une boule ouverte est ouverte.
- Une boule fermée est fermée.
- Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et une variable aléatoire X définie de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de Y. *On doit trouver une loi de Poisson.*
- Inégalité de Markov.
- Stabilité de la loi de Poisson pour la somme.
- Variance d'une somme de deux variables aléatoires. Cas général et d'indépendance.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose
  $$U_1 = \{(x,y) \,/\, x > 0\} \qquad U_2 = \{(x,y) \,/\, x \geqslant 0\}.$$
  U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais pas U_2.
- On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose
  $$U_2 = \{(x,y) \,/\, x \geqslant 0\} \qquad U_3 = \{(x,y) \,/\, 3x^2 + 2y > 0\}$$
  U_2 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et U_3 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit f l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Etude de la continuité de f.
- Soit f l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Etude de la continuité de f.
- L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- On considère le domaine T de $\mathbb{R}^2$ délimité par les côtés du triangle de sommet $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ (frontière comprise). Montrer que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- La trace et la transposition sont des applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est continue.
  Application utile en probabilité : si la suite des itérées $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L alors $AL = L = LA$ et $L^2 = L$.
- Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers une matrice A. Alors pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
  $$P^{-1}A_kP \to P^{-1}AP.$$
- Le produit matriciel $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \mapsto AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue.
  Application utile : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices qui convergent respectivement vers L et M alors $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers LM.
- Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le triangle T de l'exemple vu plus haut. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur T, les déterminer.
- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
  $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$
  où α est une constante. Déterminer α puis les lois marginales.

- Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On définit deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$ et $Y = n - X$

  -a- Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Que vaut $P_{N=n}(X = k)$?
  -b- En déduire la loi de Y. *On doit trouver une loi de Poisson.*

- On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et d'une urne contenant une proportion α de boules rouges.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile. Si le premier Pile est obtenu au k-ième lancer, on effectue alors k tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne. On note X le rang d'obtention du premier Pile et Y le nombre de boules rouges obtenues.

  -a- Déterminer la loi de X.
  -b- Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
  -c- Déterminer alors la loi de Y.

  NB : on pourra utiliser la relation

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{l=j}^{+\infty} \binom{l}{j} x^{l-j}.$$

- Retour sur l'exemple : N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
X et Y définis par : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$ et $Y = n - X$.

  -a- Montrer que X et Y sont indépendantes.
  -b- Montrer que X et N ne le sont pas.

- Retour sur l'exemple : X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \ P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$

  Calculer $E(XY)$.

- Une urne contient des boules blanches, noires, rouges en proportion p_1, p_2, p_3.
On extrait n boules de l'urne avec remise. On note X, Y, Z le nombre de boules blanches, noires et rouges obtenues.

  1) Quelle est la loi de X, la loi de Y et la loi Z ?
  2) Que vaut $X + Y + Z$? En déduire la loi de $S = X + Y$?
  3) Déterminer alors l'espérance de XY puis la covariance du couple (X, Y).

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement et sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage lorsque la boule tirée porte le numéro i. On note X le nombre de rencontres. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = 1$.
Indication : décomposer X en somme de variables de Bernoulli X_i et on vérifiera que $E(X_i) = \frac{1}{n}$.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Majorer : $P(X \geqslant n^2)$ à l'aide de l'inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda > 0$.
Majorer : $P(X \geqslant 2\lambda)$ à l'aide de l'inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 100 et $\dfrac{1}{10}$. Minorer $P(5 < X < 15)$.