

Polynômes, degré

- Un polynôme est noté $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où a_0, \dots, a_n sont des éléments de \mathbb{K} .
- Si $a_n \neq 0$, n est le degré de P , $n = \deg(P)$ et a_n est son coefficient dominant.
Si ce coefficient est 1, le polynôme P est dit **unitaire**.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré **inférieur ou égal** à n .
- **Identification des coefficients** Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux si et seulement s'ils ont même degré et leurs coefficients sont égaux c'est à dire:

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^m b_k X^k \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k \end{cases} .$$

- **Opération sur les degrés.**

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

- ▶ $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$ ou $\begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{CD}(P) \neq -\text{CD}(Q) \end{cases}$
- ▶ $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ et $\text{CD}(PQ) = \text{CD}(P)\text{CD}(Q)$
- ▶ Si Q non nul, $\deg(P \circ Q) = \deg Q \deg P$ et $\text{CD}(P \circ Q) = \text{CD}(P)(\text{CD}(Q))^{\deg P}$.
- Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^3$, $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Arithmétique

- Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
On dit que B **divise** A , noté $B|A$ ou que A **est un multiple de** B s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
- **Division euclidienne** Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$.
 Q est appelé le **quotient** et R le **reste**.
NB : A est divisible par B si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.
- **Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$** sont exactement les polynômes de degré 1.
- **Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$** sont:
 - les polynômes de degré 1
 - les polynômes de degré 2 dont le discriminant est < 0 (pas de racine réelle).

Exemple : $X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{R} et pas sur \mathbb{C} où $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Racines d'un polynôme

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- **Racine** $\tilde{P}(\alpha) = 0$ si et seulement si $X - \alpha$ divise P . On dit dans ce cas que α est **racine (ou zéro)** de P .
- **Définition de l'ordre de multiplicité** Si α est racine de P , l'**ordre de multiplicité** de la racine est le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \alpha)^m$ divise P c'est-à-dire :

$$(X - \alpha)^m | P \quad \text{et} \quad (X - \alpha)^{m+1} \nmid P.$$

On dit que α est de multiplicité m .

De manière équivalente α est une racine de P de multiplicité m s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^m Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Exemple : le polynôme $P = (X - 1)^3 X^2 (X + 2)$ possède trois racines **comptées sans leur multiplicité** : 1 (de multiplicité 3), 0 (de multiplicité 2), -2 (de multiplicité 1). Le polynôme P possède 6 racines **comptées avec leur multiplicité**.

• **Caractérisation de l'ordre de multiplicité**

$$\begin{cases} \alpha \text{ est racine de } P \text{ d'ordre} \\ \text{de multiplicité } m \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}.$$

- α racine de $P \Leftrightarrow \bar{\alpha}$ racine de P .
Dans ce cas les racines complexes conjuguées α et $\bar{\alpha}$ ont même multiplicité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de degré inférieur ou égal à n possédant au moins $n + 1$ racines **comptées avec leur multiplicité** est nul.
- Seul le polynôme nul possède une infinité de racines.
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, possède exactement n racines dans \mathbb{C} comptées avec leur multiplicité.
- Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ scindé sur \mathbb{K} de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ comptées avec leur multiplicité alors la somme et le produit des racines sont :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Applications classiques et utiles des polynômes vues en deuxième année à connaître

- **Calcul de A^n** en déterminant le reste de la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur
- **Polynômes de matrices, d'endomorphismes** : polynôme caractéristique, polynôme annulateur, racine du polynôme, multiplicité
- **Produit scalaire sur les polynômes**, la propriété "infinité de racines \Rightarrow polynôme nul" est souvent utile pour le caractère défini.
- **Suites de polynômes** définies par une relation de récurrence qui peuvent intervenir dans les problèmes, dans ce les opérations sur les degrés et les coefficients dominants sont souvent utiles
- **Interpolation de Lagrange**