Programme de colle de mathématiques
Semaine 20 - Du 23 au 28 Mars 2026

XVI. Variables aléatoires (Indépendances, inégalités)

- Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles.
- Variables aléatoires indépendantes. Lemme des coalitions. Suite iid.
- Formule de transfert pour le calcul de $E(f(X,Y))$. Espérance $E(XY)$ pour des variables aléaoires indépendantes, extension au cas de n variables aléatoires.
- Fonction génératrice $G_{X+Y} = G_X G_Y$ pour des variables aléatoires indépendantes. Stabilité de la loi binomiale/Poisson pour la somme.
- Covariance, propriétés. Variance d'une somme de deux/de n variables aléaoires. Cas des variables aléatoires deux à deux indépendantes.
- Inégalités probabilités : Markov, Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

XVII. Fonctions vectorielles

- Fonctions vectorielles : $I \to \mathbb{R}_n$, $I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $I \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.
- Dérivabilité des fonctions vectorielles. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Composition par une application linéaire : $(L(f))' = L(f')$; composition par une application bilinéaire : $(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.
- Système différentiel à coefficients constants $X' = AX$. Méthode pratique de résolution.

$\boxed{\textbf{Consigne donnée aux colleurs}}$: **un exercice de probabililités et une équation différentielle ou un système différentiel (révisez donc les formules de résolution des équations du premier ordre et du second ordre de 1ère année)**.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et une variable aléatoire X définie de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de Y. *On doit trouver une loi de Poisson.*
- Inégalité de Markov.
- Stabilité de la loi de Poisson pour la somme.
- Variance d'une somme de deux variables aléatoires. Cas général et d'indépendance.
- Dérivée de $t \mapsto L(f(t))$ où $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$
où α est une constante. Déterminer α puis les lois marginales.
- Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On définit deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$ et $Y = n - X$
  - -a- Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Que vaut $P_{N=n}(X = k)$?
  - -b- En déduire la loi de Y. *On doit trouver une loi de Poisson.*
- On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et d'une urne contenant une proportion α de boules rouges.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile. Si le premier Pile est obtenu au k-ième lancer, on effectue alors k tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne. On note X le rang d'obtention du premier Pile et Y le nombre de boules rouges obtenues.
  - -a- Déterminer la loi de X.
  - -b- Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
  - -c- Déterminer alors la loi de Y.

  NB : on pourra utiliser la relation
$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{l=j}^{+\infty} \binom{l}{j} x^{l-j}.$$
- Retour sur l'exemple : N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
X et Y définis par : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(N = n)$, X suit une loi binomiale de paramètres n, $p \in]0,1[$ et $Y = n - X$.
  - -a- Montrer que X et Y sont indépendantes.
  - -b- Montrer que X et N ne le sont pas.
- Retour sur l'exemple : X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$
Calculer $E(XY)$.
- Une urne contient des boules blanches, noires, rouges en proportion p_1, p_2, p_3.
On extrait n boules de l'urne avec remise. On note X, Y, Z le nombre de boules blanches, noires et rouges obtenues.
  1) Quelle est la loi de X, la loi de Y et la loi Z ?
  2) Que vaut $X + Y + Z$? En déduire la loi de $S = X + Y$?

3) Déterminer alors l'espérance de XY puis la covariance du couple (X, Y).

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement et sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage lorsque la boule tirée porte le numéro i. On note X le nombre de rencontres. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = 1$.
  Indication : décomposer X en somme de variables de Bernoulli X_i et on vérifiera que $E(X_i) = \frac{1}{n}$.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
  Majorer : $P(X \geqslant n^2)$ à l'aide de l'inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda > 0$.
  Majorer : $P(X \geqslant 2\lambda)$ à l'aide de l'inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 100 et $\dfrac{1}{10}$. Minorer $P(5 < X < 15)$.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
  Montrer que : $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda > 0$.
  Montrer que : $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

- On utilise un dé équilibré. Cherchons le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 0,05, que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers sera dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{100}\right[$.

- **Dérivée d'un produit de matrice**. Soit $M : I \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N : I \to \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ deux fonctions dérivables sur I. Alors la fonction $P : t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I avec :
  $$\forall t \in I, \quad P'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t).$$

- **Produit scalaire**. Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions dérivables et $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Alors l'application $F : t \mapsto (f(t)|g(t))$, noté $F = (f|g)$ est dérivable sur I avec
  $$(f|g)' = (f'|g) + (f|g') \qquad \text{soit} \qquad \forall t \in I, \quad F'(t) = (f|g)'(t) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t)).$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable sur I. Montrer que f est de norme constante si et seulement si pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.)

- Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$.

- Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases}$.

- Résoudre le système $\begin{cases} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = -4x + 6y - 5z \\ z' = -4x + 4y - 3z \end{cases}$.

- Résoudre le système $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 3x - y + \mathrm{e}^t \end{cases}$.