

E3A 2018

Révisions écrits

PC 2025-2026

X

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n .

Soit \mathbb{R}^n le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n , on a :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, 1, \dots, 1)$ le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à \vec{u} .

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.
2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Énoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est dans F . Calculer $A_n X$ en fonction de X .

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n .

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

-
7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
 8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n . Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.
 9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n - 2, n\}$.
 10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n .

Soit M une matrice de taille (n, n) . On lui associe U_M , la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

12. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M . Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.
13. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

On admet l'égalité $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n , $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n \geq 1} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad T(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H .

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série H . En déduire I .
4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T .

X

Exercice 1. ESA 2020

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R}_+ .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R}_+ .

On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de \mathbb{R}_+ tels que $x < y$.

3. Limite de f en l'infini

3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .

3.2. Déterminer la valeur de ℓ .

3.3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

E3A 2016 (Math2)

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k \geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n , pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini

$$\text{par } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

(b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

4. (a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

(b) Rappeler la formule de Stirling.

(c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
- (b) Montrer que f est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.
4. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$.
- (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.
- (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I .
5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

R_n , S_n , T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie. Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n) , (S_n) , (T_n) et (V_n) . On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = o(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) .

1. On note dans cette question $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.
- (a) Calculer U_n . Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.
- (c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$.
- (d) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, (1 - \epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1 + \epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geq N, (1 - \epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1 + \epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d) Conclure que $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.

X

Exercice 1

E3A 2021

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right)$, déterminer la valeur

de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

X

Exercice 2

E3A 2021

Question de cours

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et intégrable sur $] -\infty, -1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_a^x f(t) dt$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la base canonique de E_n .

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n .

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k e^t$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.
6. En déduire $\text{Ker}(L)$.
7.
 - 7.1. Calculer $L(e_0)$.
 - 7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.
 - 7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n .
8. Prouver que L est un automorphisme de E_n .
9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.
 - 9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.
 - 9.2. Montrer que f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ (*).
 - 9.3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (*).
 - 9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle (*).
 - 9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?
10. Comparer L^{-1} et $D + \text{Id}$.
11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base \mathcal{B} .
12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1} . Retrouver alors les valeurs propres de L .

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.
2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0, b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
 - 2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
 - 2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n . Laquelle ?

(1) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1} \sqrt{5}}$;

(2) $\frac{(-1)^{n+1} \gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n \sqrt{5}}$;

(3) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n \sqrt{5}}$.
 - 2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n .
 - 2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n \gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M V_n$.

4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

5. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_2 + b_n M$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M .

7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

X

Exercice 4 E 3A-2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E . Soit $(a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose : $(P|Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

2. Soit P un polynôme de E , calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

- 3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- 3.2. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.

- 3.3. En déduire que \mathcal{B} est une base de E et qu'elle est orthonormale.

- 3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base \mathcal{B} .

- 3.5. Déterminer $\sum_{j=0}^n L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^n P(a_j) = 0$.

- 4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .

- 4.2. Déterminer H^\perp et en déduire la dimension de H .

5. Soit Q un polynôme de E .

- 5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur H^\perp .

- 5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H .

FIN

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \dots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ième saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k -ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k .
7. Déterminer la loi de X .
8. Vérifier **par le calcul** que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

X

EXERCICE 2

E3A - 2022

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

- 1.1. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
- 1.2. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
- 1.3. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. Calcul de la somme de cette série

- 2.1. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.
- 2.2. En déduire $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$.
- 2.3. Intégration terme à terme ?

- 2.3.1. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

(Wallis)

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$? On justifiera rigoureusement la réponse.

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^n e_i \text{ et } \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } (g = f - \text{id}_{E_n}).$$

1. Donner, dans la base \mathcal{B} , F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g .

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. **Diagonalisation de f et de g dans une même base**

3.1. Déterminer une base \mathcal{B}_1 de $\text{Im}(g)$, le rang de g et une base \mathcal{B}_2 de $\text{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n .

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\text{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. **Méthode 1**

(i) Démontrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont stables par g .

(ii) Déterminer la matrice H dans la base \mathcal{B}_1 de l'endomorphisme h de $\text{Im}(g)$ induit par g .

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h .

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2 .

3.4.2. **Méthode 2**

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\text{Sp}(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base \mathcal{B} .

(iii) En déduire, en fonction de n , la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1} .

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où U est la première colonne de la matrice P .

X

EXERCICE 4

E3A-2022

On pose pour tout réel x , lorsque cela est possible, $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur \mathbb{R}_+ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall t > 0, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq t e^{-at}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall t > 0, 0 \leq \sin^2(t) e^{-xt} \leq e^{-at}$.

2.2. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, |e^{i(\theta-x)t}| = e^{-xt}$.

3.2. En déduire que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{i(\theta-x)t}| = 0$.

3.3. Démontrer alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2 + 4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur \mathbb{R} par : $G(t) = t \ln(t^2 + 4) - 2t + 4 \arctan\left(\frac{t}{2}\right)$.

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.

FIN



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

CCINP 2010

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

X

PARTIE I

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.

On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

I.1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur \mathcal{D} .

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ la somme partielle d'ordre n et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste correspondant. On a donc $R_n = U - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.2.

I.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p . Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq -n$.

I.2.2. Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b$. Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

I.2.3. Dédurre de ce qui précède que U est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

I.3.

I.3.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x + N)$.

I.3.2. En déduire que U est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - N - 1, -N[$, puis sur \mathcal{D} .

I.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

I.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

I.5.

I.5.1. Montrer que U est strictement décroissante sur $] - 1, +\infty[$.

I.5.2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $U(x) = \frac{1}{4} \left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) \right]$.

PARTIE II

II.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note f_p la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

II.1.1. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} f_p(t)$ selon les valeurs de p .

On notera désormais f_p la fonction f_p prolongée par continuité à \mathbb{R} tout entier.

II.1.2. Déterminer un équivalent de $f_p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

II.2. Soit φ la fonction d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

II.2.1. Montrer que le domaine de définition de φ est $] - 1, +\infty[$.

II.2.2. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in] - 1, +\infty[$ donnés.

Vérifier que pour tout $x \geq a$ et tout $t \geq 0$ on a $0 \leq f_p(t) e^{-xt} \leq f_p(t) e^{-at}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto f_p(t) e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

II.2.3. Déduire de ce qui précède que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, +\infty[$.

II.2.4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\varphi(x) - \varphi(x + 1) = \frac{1}{(x + 1)^2}$ pour tout $x > -1$.

II.3.2. En déduire que $\varphi(x) = U(x)$ pour tout $x > -1$.

II.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x > -1$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} e^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

PARTIE III

Soit g la fonction d'une variable réelle x , périodique de période 2π , telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

Soit $\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g) \cos nx + b_n(g) \sin nx)$ la somme de la série de Fourier de g .

III.1. Préciser pourquoi g est égale en tout point de \mathbb{R} à la somme de sa série de Fourier.

III.2.

III.2.1. Calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.2. Calculer $a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3.

III.3.1. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

III.3.2. En déduire la valeur de $U(-\frac{1}{2})$, puis celle de $U(0)$.

III.4. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

III.5. On note G la primitive de g telle que $G(0) = 0$.

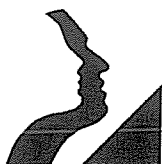
III.5.1. Montrer que G est impaire, périodique de période 2π .

III.5.2. Calculer les coefficients de Fourier de G .

Préciser pourquoi G est égale en tout point de \mathbb{R} à la somme de sa série de Fourier.

III.5.3. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

* * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps \mathbb{R} des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f .

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k \text{ fois}$.

Si f_1, \dots, f_q désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \dots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} .

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que f est diagonalisable.
- 2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- 3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) . Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P , exprimer A^m en fonction de D , P et P^{-1} .
- 4) Calculer P^{-1} , puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- 5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
- 6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- 7) Dédire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de \mathbb{R}^3 vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de \mathbb{R}^3 dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
- 2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
- 3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de \mathbb{R}^3 tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2 , q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h , combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice D de f , puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de \mathbb{R}^3 vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q .

9) Montrer que tous les endomorphismes h de \mathbb{R}^3 vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.

Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q .

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q . Déterminer la dimension de F .

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE III

Soient p_1, \dots, p_m , m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

2) En déduire que $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Montrer que pour tout entier ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i .

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F .

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

8.1) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f .

8.2) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h .

8.3) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors $2p - 1 \leq n$.

3) Déterminer les réels a_0, \dots, a_{n-1} tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage

de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

B) 1) Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ .

Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ . Déduire de la question précédente que $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

Fin de l'énoncé

X

EXERCICE 1

CCINP 2019

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- Q1.** Justifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.
Q2. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

- Q3.** Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

- Q4.** Conclure que $(X^k | 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

- Q5.** Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Q8.** Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
- Q9.** En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
- Q10.** Justifier que P_k est de degré k .
- Q11.** Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille (P_0, \dots, P_n)

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- Q12.** Montrer que $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.
- Q13.** En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.
- Q14.** Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note x_1, \dots, x_n .

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

- Q15.** Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie (*) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

- Q16.** En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (*).
- Q17.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

EXERCICE 2

CCINP 2019

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q18. Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Q19. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

Q20. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q21. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

Q22. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur]0, 1[ou]1, +∞[

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

- Q23.** Justifier que z est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .
- Q24.** Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

- Q25.** Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

- Q26.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Partie III - Solutions de (E) sur]0, +∞[

- Q27.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 2 CCINP 2019

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 :
$$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n°3}} \cap F_8 \cap \dots$$

Exemple 2 :
$$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n°3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q14. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k.$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q16. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket$.

Q17. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q18. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Q19. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q20. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

Q22. Soit $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ les relations :

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k - 1) \cap P_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k - 1) \cap F_n).$$

Q23. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k - 1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m P(N_m = k)x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

Q24. Dédire de **Q23** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

Q25. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q26. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

Q27. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

EXERCICE 3

CCINP 2019

La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler Important

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n).$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

Q28. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.

Q29. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q30. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q30**, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Q31. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

Q32. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.

Q34. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q35. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q36. Dédire des résultats de la sous-partie II.1 que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

Q37. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Q38. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + nJ_n.$$

Q39. Dédire des questions précédentes que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

FIN

X

EXERCICE 2 CCINP 2020

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et on considère l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n . On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i = j \\ \frac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

- Q11.** Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2 .
- Q12.** En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2 .
- Q13.** Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de \mathbb{R}^2 .
- Q14.** En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1 .
- Q15.** Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2 .

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.

On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Q17. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q18. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

Q19. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.

Q20. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n .

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

Q22. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

EXERCICE 3 CCINP 2020

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'évènement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q23. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q24. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .

Q25. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Q26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q27. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .

Q28. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. Montrer que $R_p \geq 1$.

Q30. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

Q31. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q32. Calculer q_1 et q_2 .

Q33. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

Q34. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q35. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q36. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q37. En utilisant **Q33** et **Q35**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q38. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

FIN



EXERCICE 1

C C i n p 2021

Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

- Q1. Déterminer la loi de X_1 .
- Q2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .
- Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Q4. Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
- Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

- Q6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

EXERCICE 1

Endomorphisme cyclique

X

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E .

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y).$$

- Q1.** En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de \mathbb{R}^2 .
- Q2.** Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f .
- Q3.** Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de \mathbb{R}^2 ?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- Q4.** Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
- Q5.** Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Q6.** L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

Q7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.

Q9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k .

Soit $v \in E$. Comme \mathcal{B} est une base de E , il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Q11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

Q12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base \mathcal{B} est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Q13. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

EXERCICE 2

CCINP 2023

X

La fonction dilogarithme

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1], \quad f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}.$$

Q14. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q15. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q16. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x) dt.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q17. Montrer que la fonction L est continue sur $] -\infty, 1]$.

Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière. On considère un nombre réel $x \in]-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = t e^{-(n+1)t} x^n.$$

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q19. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).$$

Q20. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q21. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2)$.

Q22. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x).$$

Q23. Justifier que la fonction L est dérivable sur $] -1, 1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q24. Montrer que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

Q25. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$.