

# CHAPITRE

# FONCTIONS VECTORIELLES

L'objectif de ce chapitre est de généraliser aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de dérivée d'une fonction numérique. Une des applications consiste en la résolution des systèmes différentiels, on trouvera l'occasion de rappeler les techniques de résolution d'équations différentielles linéaire du premier et second ordre vues en PCSI.  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## I Fonctions vectorielles, continuité

Pour une fonction vectorielle  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on pose  $f = (f_1 \dots, f_n)$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

$f$  est donc une application entre espaces vectoriels normés de dimension finie, les résultats du chapitre "Continuité dans les espaces vectoriels normés" s'appliquent donc à  $f$ . Adaptons et citons ceux qui nous intéressent. Avec les notations ci-dessus et  $a$  un point adhérent à  $I$ .

- Si  $l = (l_1 \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $f$  admet pour limite  $l$  en  $a$  si  $\|f(t) - l\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$ .  
Ce qui équivaut à :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} l_i.$$

- Si  $a \in I$ ,  $f$  est continue en  $a$  si  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} f(a)$ . Ce qui équivaut à  $f_i$  continue en  $a$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ . Ce qui est équivaut à  $f_i$  continue sur  $I$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

### Exemples

- 1) Soit  $f(t) = \left(2 + e^{-t^2}, \frac{\sin t}{t}\right)$ . Calculer la limite de  $f$  en 0.
- 2) Soit  $f(t) = (e^t \cos(2t), 3t^2 + 5t - 3)$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## II Dérivabilité des fonctions vectorielles

### II.1 Dérivabilité en un point

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction et  $a \in I$ .

#### Définition (Dérivabilité en un point)

La fonction  $f$  est dite **dérivable en  $a$**  si la limite en  $a$  du taux d'accroissement  $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  existe et est finie. On note  $f'(a)$  cette limite (qui appartient à  $\mathbb{R}^n$ ) que l'on appelle dérivée de  $f$  en  $a$ .

#### Remarques (Interprétation cinématique)

Lorsque  $n = 2$  ou  $n = 3$ .  $f(t)$  représente via ses coordonnées la position d'un mobile au ponctuel à l'instant  $t$ . Si la fonction  $f$  est dérivable en  $t_0$ , le vecteur  $f'(t_0)$  est parfois appelé vecteur vitesse à l'instant  $t_0$ .

### Théorème (Caractérisation à l'aide des applications coordonnées)

En notant  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i$  est dérivable en  $a$ . Dans ce cas on a  $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$ .

### Théorème (Caractérisation à l'aide d'un DL à l'ordre 1)

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ , autrement dit s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , tel que

$$f(t) = f(a) + (t - a)\alpha + o_a(t - a).$$

Dans ce cas  $\alpha = f'(a)$ .

### Proposition (Dérivable $\Rightarrow$ continue)

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

## II.2 Dérivabilité sur un intervalle

### Définition (Dérivabilité sur un intervalle)

$f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

### Définition (Dérivées successives, classe $\mathcal{C}^k$ , classe $\mathcal{C}^\infty$ )

- On définit les dérivées successives de  $f$  (si elles existent) par récurrence:

–  $f^{(0)} = f$


- soit  $k \in \mathbb{N}$ , si on a réussi à définir  $f^{(k)}$  sur  $I$  au cours des étapes précédentes et si  $f^{(k)}$  est dérivable sur  $I$ , on pose  $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ .

Alors  $f^{(k)}$  est la dérivée  $k$ -ième de  $f$ , On dit alors que  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$ .

- Pour  $k \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable et si la dérivée  $k$ -ième est continue.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### Théorème (Caractérisation à l'aide des applications coordonnées)

En notant  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f$  est dérivable/de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $f_i$  est dérivable/de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ . Dans ce cas on a  $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$ .

 **En pratique**  Comme  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  peut être identifié à  $\mathbb{R}^{np}$ , tous les résultats qui précèdent s'adaptent aux fonctions  $f : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**Exemple** Soit  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & t^2 \\ e^{-t} & \sin(t) \end{pmatrix}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & 2t \\ -e^{-t} & \cos(t) \end{pmatrix}$ .

### Théorème (Combinaison linéaire d'applications dérivables)

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications dérivables sur un intervalle  $I$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda f + g$  est dérivable sur  $I$  avec  $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ .

## II.3 Dérivabilité et composition

### Théorème (Composition d'une application linéaire et d'une application dérivable)

Soit  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application linéaire,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application dérivable sur  $I$ .  
Alors  $L \circ f$  abusivement noté  $L(f)$  est dérivable sur  $I$  avec  $(L \circ f)' = L \circ f'$  soit

$$\forall t \in I, \quad (L \circ f)'(t) = L(f'(t)).$$

### Théorème (Composition d'une application bilinéaire et d'applications dérivables)

Soient  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application bilinéaire,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  des applications dérivables sur  $I$ .

Alors l'application  $F : t \mapsto B(f(t), g(t))$ , noté abusivement  $F = B(f, g)$  est dérivable sur  $I$  avec

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g') \quad \text{soit} \quad \forall t \in I, \quad F'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

**Exemple - Dérivée d'un produit.** Soit  $M : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $N : I \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  deux fonctions dérivables sur  $I$ .  
Alors la fonction  $P : t \mapsto M(t)N(t)$  est dérivable sur  $I$  avec :

$$\forall t \in I, \quad P'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t).$$

Découle de la bilinéarité du produit de matrices  $(A, B) \mapsto AB$ .

Si  $p = q = n = 1$ , on retrouve la dérivée du produit de fonctions :  $(uv)' = u'v + uv'$  où  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivables.

**Application - A retenir - Produit scalaire.** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions dérivables et  $(\cdot|\cdot)$  un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'application  $F : t \mapsto (f(t)|g(t))$ , noté abusivement  $F = (f|g)$  est dérivable sur  $I$  avec

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g') \quad \text{soit} \quad \forall t \in I, \quad F'(t) = (f|g)'(t) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t)).$$

Découle de la bilinéarité du produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ .

**Exemple -** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable sur  $I$ . Montrer que  $f$  est de norme constante si et seulement si pour tout  $t \in I$ ,  $f(t)$  et  $f'(t)$  sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .)

### Théorème (Composition d'une application $p$ -linéaire et d'applications dérivables)

Soient  $M : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application  $p$ -linéaire,  $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des applications dérivables sur  $I$ .

Alors l'application  $F : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ , noté abusivement  $F = M(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable sur  $I$  avec

$$M(f_1, \dots, f_p)' = M(f_1', f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + M(f_1, f_2, \dots, f_p')$$

soit

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = M(f_1'(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) + M(f_1(t), f_2'(t), \dots, f_p(t)) + \dots + M(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p'(t)).$$

**Application - A retenir - Déterminant.** Soient  $M : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une application dérivable.

Pour  $t \in I$ , on note  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  les colonnes de  $M(t)$ . Alors l'application  $F : t \mapsto \det(M(t)) = \det(C_1(t), \dots, C_p(t))$  est dérivable sur  $I$  avec

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \dots, C_p(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), \dots, C_p(t)) + \dots + \det(C_1(t), C_2(t), \dots, C_p'(t)).$$

### Théorème (Composition de deux applications)

Soit  $\varphi : J \rightarrow I$  une fonction dérivable (où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ),  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application dérivable sur  $I$ .

Alors  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $J$  avec

$$\forall t \in J, \quad (f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

### III Systèmes différentiels à coefficients constants

Soient

- $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $B$  une fonction vectorielle à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^0$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

$$t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

- $X$  une fonction vectorielle à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à la résolution des systèmes différentiels  $X' = AX$  et  $X' = AX + B$  d'inconnue  $X$ .

#### Exemples

- 1) Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$ .
- 2) Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases}$ .

**NB** : dans le cas général on sait résoudre facilement un système différentiel où la matrice est diagonale, et dans des cas simples de matrice triangulaire. L'objectif dans le cas général est de s'y ramener.

#### Méthode pratique (Résolution d'un système différentiel)

On cherche à résoudre le système linéaire  $X' = AX$  ou  $X' = AX + B$ .

- Si  $A$  est diagonale ou triangulaire on sait faire directement en résolvant des équations différentielles d'inconnue une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$
- Sinon, on diagonalise (ou on trigonalise le cas échéant) :  $A = PDP^{-1}$  où  $D$  est diagonale et  $P$  est inversible.
  - ▶ On pose  $Y = P^{-1}X$  c'est-à-dire  $X = PY$  alors  $Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et dans ce cas  $X' = PY'$  (composée de l'application linéaire  $Z \mapsto PZ$  et  $Y$ )
  - ▶ Constater que  $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$  (ou  $X' = AX + B \Leftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B$ )
  - ▶ Résoudre  $Y' = DY$  (ou  $Y' = DY + P^{-1}B$ ) puis revenir aux solutions du problème initial avec la relation  $X = PY$ .
- Enfin, trouver l'unique solution si des conditions initiales ont été données.

#### Exemples

- 1) Résoudre le système  $\begin{cases} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = -4x + 6y - 5z \\ z' = -4x + 4y - 3z \end{cases}$ .
- 2) Résoudre le système  $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 3x - y + e^t \end{cases}$ .