

# CHAPITRE VARIABLES ALÉATOIRES : COUPLE, INDÉPENDANCE, INÉGALITÉS

Dans tout ce chapitre  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un espace probabilisé.

## I Couple de variables aléatoires

### I.1 Loi conjointe, lois marginales

#### Définition (Couple de variables aléatoires)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes. Le couple  $Z = (X, Y)$  est une variable aléatoire discrète.

- La loi de probabilité du couple  $(X, Y)$  est appelée la **loi conjointe** de  $(X, Y)$  elle est déterminée par la donnée pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  de  $P((X, Y) = (x, y)) = P([X = x] \cap [Y = y])$  aussi noté  $P(X = x, Y = y)$ .
- Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont les **lois marginales** de  $(X, Y)$ .

**NB** : noter que  $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$ .

#### Proposition (Lois marginales à partir de la loi conjointe)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes.

- Pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

- Pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

**Explication** Si  $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$  où  $I$  et  $J$  sont dénombrables et  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ , les égalités se réécrivent

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij} \qquad P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}.$$

	$(Y = y_1)$	$(Y = y_2)$	$\dots$	$(Y = y_j)$	$\dots$	loi de $X$
$(X = x_1)$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\dots$	$P(X = x_1)$
$(X = x_2)$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\dots$	$P(X = x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$(X = x_i)$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\dots$	$P(X = x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
loi de $Y$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	$\dots$	$P(Y = y_j)$		1

## Exemples

- 1) Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges. On extrait successivement les 3 boules de l'urne. On note  $X$  le rang d'apparition de la boule blanche et  $Y$  le rang d'apparition de la deuxième boule rouge. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ . Puis les lois marginales.
- 2) On lance deux dés à 6 faces. On considère  $X$  (resp.  $Y$ ) le plus petit (resp. grand) nombre obtenu. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ . Puis les lois marginales.
- 3) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$

où  $\alpha$  est une constante. Déterminer  $\alpha$  puis les lois marginales.

⚠ **Attention** ⚠ Si à partir de la loi conjointe on peut obtenir les lois marginales. La réciproque est fautive :

$X \setminus Y$	1	2	loi de $X$
1	0	1/2	1/2
2	1/2	0	1/2
loi de $Y$	1/2	1/2	1

$X \setminus Y$	1	2	loi de $X$
1	1/4	1/4	1/2
2	1/4	1/4	1/2
loi de $Y$	1/2	1/2	1

## I.2 Loi conditionnelle

### Définition (Lois conditionnelles)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes.

Soit  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P(X = x) > 0$ . La **loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = x)$**  est la loi de  $Y$  dans l'espace probabilisé  $(\Omega, P_{(X=x)})$ . Elle est donnée pour tout  $y \in Y(\Omega)$  par

$$P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

## Exemples

- 1) Soit  $N$  une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On définit deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de la manière suivante. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que sachant  $(N = n)$ ,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n, p \in ]0, 1[$  et  $Y = n - X$ 
  - a- Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ . Que vaut  $P_{N=n}(X = k)$ ?
  - b- En déduire la loi de  $Y$ . On doit trouver une loi de Poisson.
- 2) On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  et d'une urne contenant une proportion  $\alpha$  de boules rouges. On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile. Si le premier Pile est obtenu au  $k$ -ième lancer, on effectue alors  $k$  tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne. On note  $X$  le rang d'obtention du premier Pile et  $Y$  le nombre de boules rouges obtenues.
  - a- Déterminer la loi de  $X$ .
  - b- Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
  - c- Déterminer alors la loi de  $Y$ .

**NB :** on pourra utiliser la relation

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{l=j}^{+\infty} \binom{l}{j} x^{l-j}.$$

## II Indépendance de variables aléatoires

### II.1 Cas de deux variables aléatoires

#### Définition (Cas de deux variables aléatoires)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes.  
 $X$  et  $Y$  sont dites **indépendantes**, noté  $X \perp\!\!\!\perp Y$  si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

#### Théorème (Caractérisation de l'indépendance)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes.  
 $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes si et seulement si pour toutes parties  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$  les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants c'est-à-dire

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

#### Exemples

- 1) On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On note  $X$  et  $Y$  les variables de Bernoulli, telles que  $X = 1$  (resp.  $Y = 1$ ) si pile a été obtenu au premier (resp. deuxième) lancer.

$x^Y$	0	1	loi de $X$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
loi de $Y$	1/2	1/2	1

Les deux variables aléatoires sont indépendantes car...

- 2) Retour sur l'exemple :  $N$  une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .  
 $X$  et  $Y$  définis par : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que sachant  $(N = n)$ ,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $Y = n - X$ .
- a- Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
  - b- Montrer que  $X$  et  $N$  ne le sont pas.

#### Méthode pratique (Montrer que deux va ne sont pas indépendantes)

Pour montrer que  $X$  et  $Y$  **ne sont pas indépendantes** on trouve un couple  $(x, y)$  tel que

$$P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y).$$

Souvent  $P(X = x, Y = y) = 0$  sans que ni  $P(X = x)$ , ni  $P(Y = y)$  ne le soit.

#### Théorème (Image de variables aléatoires indépendantes)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires **indépendantes** et  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

### II.2 Cas de $n$ variables aléatoires

#### Définition (Cas de deux variables aléatoires)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes.  
 $X_1, \dots, X_n$  sont dites **mutuellement indépendantes** ou **indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n).$$

### Théorème (Caractérisation de l'indépendance)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes.  
Alors pour toutes parties  $A_1, \dots, A_n$  de  $\mathbb{R}$  les événements  $(X_i \in A_i)$  sont indépendants.

**Exemple** Soient  $X, Y, Z$  des variables indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ . Déterminer la loi de  $M = \min(X, Y, Z)$ .

### Remarques ("Indépendance mutuelle" $\Rightarrow$ "indépendance deux à deux")

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes alors elles sont deux à deux indépendantes.

$\triangle$  **Attention**  $\triangle$  La réciproque est fautive. Contre-exemple : on lance un dé deux fois de suite. On note  $X, Y, Z$  les variables de Bernoulli, telles que  $X = 1$  (resp.  $Y = 1$ , resp.  $Z = 1$ ) si le premier chiffre (resp. le deuxième chiffre, resp. la somme) est pair.  $X, Y, Z$  sont indépendantes mais pas deux à deux indépendantes.

### Théorème (Lemme des coalitions)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes indépendantes et  $f, g$  des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

**NB** : on peut généraliser au cas de plus de deux coalitions.

**Exemple** Soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  des variables aléatoires indépendantes. Alors

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 + X_3 + X_4$        $X_1^2 \perp\!\!\!\perp X_2 X_3$        $X_1^2 + \exp(X_2^2) \perp\!\!\!\perp X_3 X_4$ .       $X_1, X_2^2, X_3 X_4$  sont indépendantes.

## II.3 Suite de variables aléatoires

### Définition (Suite de variables aléatoires)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes.

- On dit que c'est une **suite de variables indépendantes** si pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $X_0, X_1, \dots, X_N$  sont indépendantes.
- On dit que c'est une **suite i.i.d.** (indépendantes identiquement distribuées) lorsque c'est une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la même loi.

**Explication** Une telle suite i.i.d. sert à modéliser une répétition infinie d'une même expérience (l'issue de chacune des expériences ne dépendant à nouveau pas de l'issue des autres expériences).

Par exemple, le **jeu de Pile ou Face infini**. On lance indéfiniment une pièce (pas nécessairement équilibrée), on pose  $X_n = 1$  si le résultat du  $n$ -ième lancer est "pile" et 0 sinon. Dans ce cas, on a une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

**Exemple** On lance indéfiniment un dé non pipé, chaque lancer est indépendant des précédents.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $T_n$  le rang d'apparition du  $n$ -ième 6 et on note  $X_n = T_n - T_{n-1}$  avec la convention  $T_0 = 0$ . Justifier que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite i.i.d. et préciser leur loi.

## III Espérance

### III.1 Formule de transfert

La formule de transfert déjà vue dans le chapitre précédent s'applique aux couples et aux  $n$ -uplets de variables aléatoires qui sont elles-mêmes des variables aléatoires.

### Corollaire (Formule de transfert pour les couples)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes et  $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La variable aléatoire  $Z = f(X, Y)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x, y)P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)P(X = x, Y = y).$$

**NB** : c'est sous cette forme, avec  $f(x, y) = x + y$  que l'on démontre facilement  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

**Exemple** Retour sur l'exemple :  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$

Calculer  $E(XY)$ .

## III.2 Espérance du produit

### Théorème (Espérance du produit)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**. Alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

⚠ **Attention** ⚠ L'égalité est fautive en général :

$X \setminus Y$	1	2	loi de $X$
1	0	1/2	1/2
2	1/2	0	1/2
loi de $Y$	1/2	1/2	1

Et la réciproque est fautive : prendre  $X$  de loi uniforme sur  $\{-1, 0, 1\}$  et  $Y = X^2$ .

### Remarques (Extension au cas de $n$ variables aléatoires)

La propriété se généralise à un nombre quelconque de variables aléatoires : si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes, chacune d'espérance finie, alors  $X_1 \cdots X_n$  est aussi d'espérance finie, et on a

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n).$$

## III.3 Fonction génératrice et indépendance

### Théorème (Fonction génératrice d'une somme)

- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .
- Plus généralement, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes alors

$$G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \cdots G_{X_n}.$$


### Théorème (Stabilité de la loi binomiale, de Poisson pour la somme)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires **indépendantes**.

- 1) Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$  alors  $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$ .
- 2) Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  alors  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

⚠ **Attention** ⚠ Sans l'hypothèse d'indépendance ce résultat n'est plus forcément vrai.

## IV Variance - Covariance

 **Explication**  On souhaite calculer la variance de la somme de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . De quelles hypothèses a-t-on besoin?

$$\begin{aligned}V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))\end{aligned}$$

On a besoin de  $X, Y, X^2, Y^2, XY$  d'espérance finie. On sait déjà que  $X^2$  d'espérance finie implique que  $X$  l'est aussi.

### IV.1 Covariance

#### Théorème (Espérance de $XY$ )

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes. Si  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie alors  $XY$  l'est aussi et

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

**NB** : l'hypothèse " $X^2$  et  $Y^2$  d'espérance finie" peut être remplacée par l'hypothèse équivalente " $X$  et  $Y$  de variance finie".

#### Théorème-Définition (Covariance)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes telles que  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie. Alors  $(X - E(X))(Y - E(Y))$  est d'espérance finie. Cette espérance est appelée **covariance** du couple  $(X, Y)$ , on la note  $\text{Cov}(X, Y)$ ,

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

#### Théorème (Expression de la covariance - Formule de Konig-Huyghens)



Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes telles que  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie. Alors:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

#### Théorème (Covariance de variables aléatoires indépendantes)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie. Si  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

Contraposée :  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

 **Attention**  La réciproque est fautive. Même contre-exemple que  $E(XY) = E(X)E(Y) \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ .

#### Théorème (Propriétés de la covariance)

La covariance est bilinéaire, symétrique et positive. Soient  $X, Y, Z$  des variables aléatoires discrètes et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- **bilinéaire** :  $\text{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$      $\text{Cov}(Z, \lambda X + Y) = \lambda \text{Cov}(Z, X) + \text{Cov}(Z, Y)$
- **symétrique** :  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- **positive** :  $\text{Cov}(X, X) = V(X) \geq 0$

### Remarques (Cov un produit scalaire ??)

Il y a donc de fortes similitudes avec un produit scalaire. Ce n'en est toutefois pas un : la covariance n'est pas "définie". La propriété  $\text{Cov}(X, X) = 0$  c'est-à-dire  $V(X) = 0$  implique seulement que la variable aléatoire  $X$  est presque sûrement égale à son espérance (la probabilité de l'évènement  $X = E(X)$  est nulle). Cependant on peut prouver, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (qui ne demande pas le caractère "défini") :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

## IV.2 Variance d'une somme

### Théorème (Variance d'une somme va indépendantes)

- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes et de variance finie. Alors  $X + Y$  est de variance finie et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

- Si de plus  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Exemple** Une urne contient des boules blanches, noires, rouges en proportion  $p_1, p_2, p_3$ . On extrait  $n$  boules de l'urne avec remise. On note  $X, Y, Z$  le nombre de boules blanches, noires et rouges obtenues.

- 1) Quelle est la loi de  $X$ , la loi de  $Y$  et la loi  $Z$  ?
- 2) Que vaut  $X + Y + Z$ ? En déduire la loi de  $S = X + Y + Z$  ?
- 3) Déterminer alors l'espérance de  $XY$  puis la covariance du couple  $(X, Y)$ .

### Théorème (Variance d'une somme : cas général)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes de variance finie

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

### Corollaire (Variance d'une somme de variables aléatoires deux à deux indépendantes)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes **deux à deux indépendantes** alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

### Exemples

- 1) Retrouver la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- 2) Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On les extrait successivement et sans remise. On dit qu'il y a un rencontre au  $i$ -ème tirage lorsque la boule tirée porte le numéro  $i$ . On note  $X$  le nombre de rencontres. Montrer que  $E(X) = V(X) = 1$ .

*Indication : décomposer  $X$  en somme de variables de Bernoulli  $X_i$  et on vérifiera que  $E(X_i) = \frac{1}{n}$ .*

## V Inégalités probabilistes

### V.1 Inégalité de Markov

#### Théorème (Inégalité de Markov)

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète **positive** et d'espérance finie.  
Pour tout réel  $a > 0$ ,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

#### Exemples

- 1) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que :  $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$ .

- 2) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda > 0$ .

Montrer que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{2}$ .

**Utilisation fréquente : à savoir refaire.**

- Si  $X$  est d'espérance finie alors pour tout  $a > 0$ ,  $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ .
- Si  $X^2$  est d'espérance finie alors pour tout  $a > 0$ ,  $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}$ .

### V.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

#### Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soient  $X$  une variables aléatoire discrète **positive** et de variance finie.  
Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ ,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

**Explication** L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev confirme ce que mesure la variance. Elle permet d'estimer quantitativement la probabilité que la variable aléatoire prenne des valeurs "à distance supérieure à  $\varepsilon$ " de sa moyenne. Cette probabilité est d'autant plus petite que la variance est faible et d'autant plus petite que  $\varepsilon$  est grand. La variance donne donc une indication de la dispersion de  $X$  autour de son espérance, c'est-à-dire sa tendance à s'écarter de sa moyenne.

Si  $V(X) = +\infty$  ou si  $V(X) \geq \varepsilon^2$  l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'apporte rien.

#### Exemples

- 1) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 100 et  $\frac{1}{10}$ . Minorer  $P(5 < X < 15)$ .

- 2) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que :  $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$ .

- 3) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda > 0$ .

Montrer que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ .

### V.3 Loi faible des grands nombres

#### Théorème (Loi faible des grands nombres)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi, de variance finie.

On pose  $m = E(X_1)$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration** : elle repose sur l'inégalité à savoir retrouver  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$  où  $\sigma = \sigma(X_1)$ .  $\square$

**Explication**  $\frac{S_n}{n}$  représente la moyenne des valeurs prises par les variables aléatoires. La loi faible des grands nombres stipule que cette moyenne tend en un certain sens vers  $m = E(X_1)$ .

**Exemple** On utilise un dé équilibré. Cherchons le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 0,05, que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces  $n$  lancers sera dans l'intervalle  $]\frac{1}{6} - \frac{1}{100}, \frac{1}{6} + \frac{1}{100}[$ .

*Indication* : On note  $S_n$  la variable aléatoire donnant le nombre d'as à l'issue de ces  $n$  lancers. Alors  $S_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ . La fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces  $n$  lancers est  $\frac{S_n}{n}$ .