

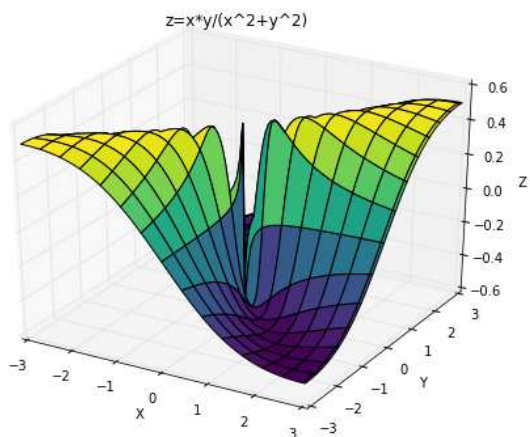
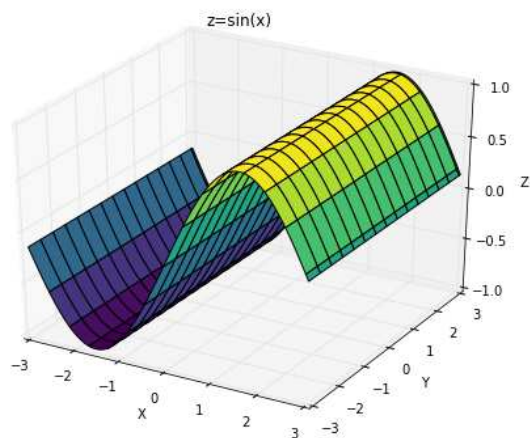
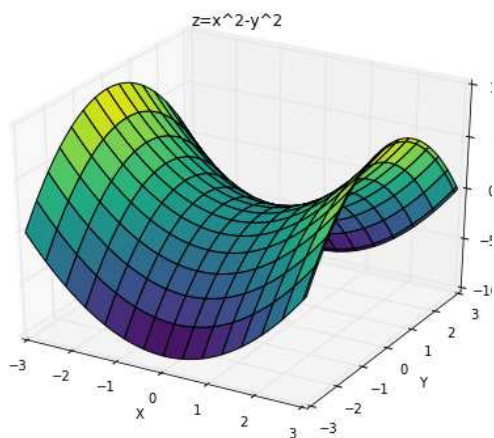
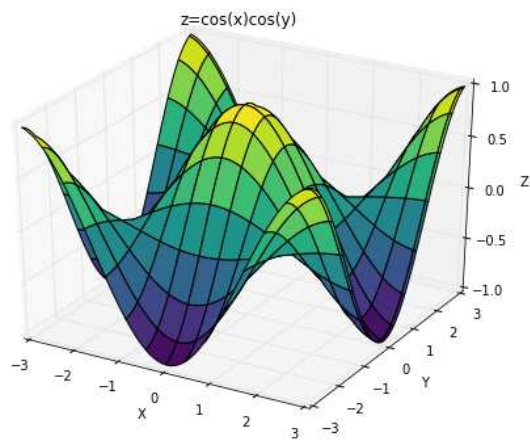
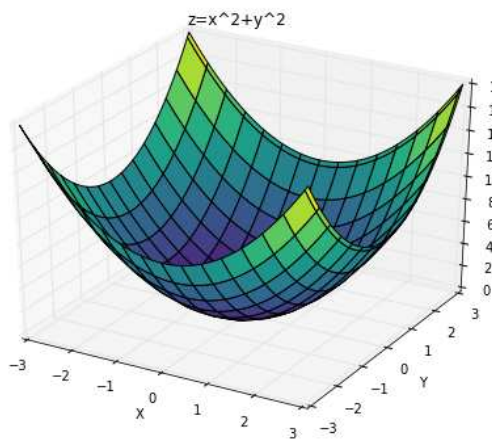
# CHAPITRE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^p$  (avec le plus souvent  $p = 2$  ou  $p = 3$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}^p$  est muni du produit scalaire usuel  $(\cdot|\cdot)$  et de la norme euclidienne associée  $\|\cdot\|$ .

Lorsque  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$ , le graphe de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est :

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in A\}.$$



L'objectif de ce chapitre partie est d'étendre la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables.

# I Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

## I.1 Dérivées partielles

### Définition (Dérivée directionnelle)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^p$ .

On dit que  $f$  admet **une dérivée en  $a$  dans la direction  $v$** , si la limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$  existe et est finie c'est-à-dire  $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tv) \in \mathbb{R}$  est dérivable en 0.

On note

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

**Explication** Dans cette limite, on s'approche de  $a$  dans la direction  $v$ . Le fait que  $U$  soit ouvert implique qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in [-\delta, \delta]$ ,  $a + tv \in U$ , ce qui permet de définir  $f(a + tv)$  pour  $t$  au voisinage de 0.

### Exemple

- On pose  $f(x, y) = x^2 + 2x + xy + 1$ . Calculer la dérivée directionnelle en  $a = (-1, 2)$  selon le vecteur  $(3, 1)$ .
- On pose  $\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = x \end{cases}$ . Calculer la dérivée directionnelle en  $a = (0, 0)$  selon le vecteur  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ .

### Définition (Dérivées partielles)

On note  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ .

On dit que  $f$  admet **une dérivée partielle en  $a$  selon la variable  $x_i$**  si  $f$  admet une dérivée en  $a$  dans la direction  $e_i$ , dans ce cas on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) \quad \text{ou encore} \quad \partial_i f(a) = D_{e_i} f(a).$$

### Méthode pratique (Cas $\mathbb{R}^2$ : dérivée partielle en $(x_0, y_0)$ )

- $f$  possède une **dérivée partielle par rapport à sa première variable** en  $(x_0, y_0)$  si  $f$  admet une dérivée en  $(x_0, y_0)$  dans la direction  $e_1 = (1, 0)$ .

Cette dérivée est notée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

- $f$  possède une **dérivée partielle par rapport à sa seconde variable** en  $(x_0, y_0)$  si  $f$  est dérivable en  $(x_0, y_0)$  dans la direction  $e_2 = (0, 1)$ .

Cette dérivée est notée  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

**Explication** Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  revient à dériver  $f$  par rapport à la variable  $x_i$  en considérant que les autres variables sont fixées.

## Exemples

- 1) Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \sin(x^2y)$ . Calculer les dérivées partielles de  $f$ .
- 2) **Une fonction qui admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$  sans être continue en ce point.**
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$
- 3) **Une fonction qui admet des dérivées en  $(0, 0)$  dans toutes les directions sans être continue en ce point.**
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = x \end{cases}$$

### Définition (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ )

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  est dite **de classe  $\mathcal{C}^1$**  sur  $U$  si  $f$  possède des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$  sur  $U$  qui de plus sont continues sur  $U$ .

On note  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  leur ensemble.

### Théorème (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ )

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1)  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^U$  stable pour le produit.
- 2) Si  $f \in \mathcal{C}^1(U, I)$ , où  $I$  est un intervalle et  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  alors  $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

## Exemples

- 1) Les fonctions  $f_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $f_2 : (x, y) \mapsto y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Toute fonction polynomiale est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$
- 3) La fonction  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- 4) Soit la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$
. Étudier le caractère  $\mathcal{C}^1$  de cette fonction.

### Définition (Gradient)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ .

Si  $f$  possède des dérivées partielles en  $a$ , on définit le **gradient** de  $f$  en  $a$  par 
$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

## I.2 Développement limité d'ordre 1

### Théorème (Développement limité d'ordre 1)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ . Alors  $f$  admet **un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $a$**  c'est-à-dire pour  $h = (h_1, \dots, h_p)$ :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|h\|) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \|h\| \varphi(\|h\|) \quad \text{où } \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \\ &= f(a) + (\nabla f(a)|h). \end{aligned}$$

**Preuve** - Admis (conformément au programme).  $\square$

### Définition (Différentielle)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ . La **différentielle de  $f$  en  $a$**  notée  $df(a)$  est la forme linéaire définie sur  $\mathbb{R}^p$  par :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = (\nabla f(a)|h).$$

Si  $h = (h_1, \dots, h_p)$ , on note  $[df(a)](h) = df(a) \cdot h$

$$df(a) \cdot h = (\nabla f(a)|h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

### Corollaire (Réécriture du développement limité d'ordre 1)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ . Alors le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $a$  se réécrit :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{ou encore} \quad f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(\|h\|).$$

On a vu que l'existence de dérivées partielles n'assure pas la continuité. Par contre:

### Théorème ( $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$ )

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  alors  $f$  est continue sur  $U$ .

### Théorème ( $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ dérivable selon tout vecteur $v$ )

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ . Alors  $f$  admet des dérivées en  $a$  selon tous les vecteurs. Avec, pour tout  $v \in \mathbb{R}^p$ ,

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v = (\nabla f(a)|v).$$

### Remarques (Interprétation géométrique du gradient)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$  tel que  $\nabla f(a) \neq 0$ .

Le vecteur  $\nabla f(a)$  est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire  $v$  selon lequel la dérivée de  $f$  est maximale.

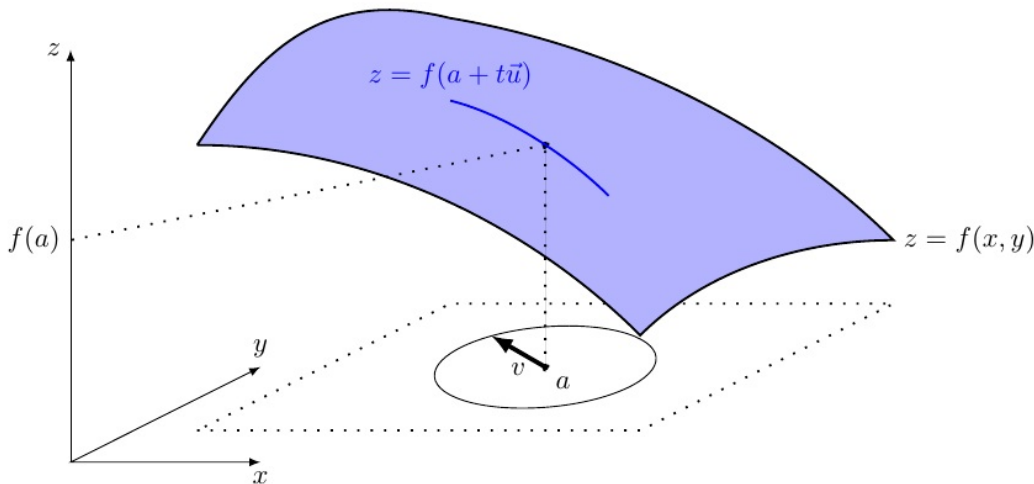
Dans le cas où  $p = 2$ ,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  et son graphe est la surface d'équation  $z = f(x, y)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $a = (a_1, a_2) \in U$  un point régulier. Cherchons la direction de la ligne de plus grande pente de cette surface au point  $(a, f(a))$ . Pour ce faire, considérons un mobile se déplaçant sur la surface, situé en  $(a, f(a))$  à l'instant  $t = 0$ , et dont le déplacement horizontal se fait à vitesse constante (égale à 1 par exemple) dans la direction du vecteur unitaire  $v = (v_1, v_2)$ . Autrement dit, le mobile décrit la courbe paramétrée de l'espace

$$x(t) = a_1 + tv_1, \quad y(t) = a_2 + tv_2, \quad z(t) = f(x(t), y(t)) = f(a + tv).$$

Nous nous intéressons à la façon de choisir le vecteur  $v$  pour que l'altitude  $z(t)$  augmente, au voisinage de  $t = 0$ , le plus rapidement possible. Autrement dit, on cherche à maximiser la dérivée de cette quantité en  $t = 0$ . Or on a

$$z'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Par conséquent, le vecteur  $\nabla f(a)$  dirige la ligne de plus grand pente de la surface.



### I.3 Règle de la chaîne

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $\gamma = (x_1, \dots, x_p) : I \rightarrow U$  une fonction vectorielle, on peut s'intéresser à la composition

$$t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t)).$$

C'est une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , d'une seule variable réelle, on s'intéresse à sa dérivée.

### Théorème (Règle de la chaîne)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\gamma = (x_1, \dots, x_p) : I \rightarrow U$  ( $I$  : intervalle de  $\mathbb{R}$ ) deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors la fonction

$$F = f \circ \gamma : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$ , sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \sum_{i=1}^p x'_i(t) \partial_i f(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \sum_{k=1}^p x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} f(x_1(t), \dots, x_p(t)).$$

ou encore

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)).$$

**Exemples** On pose  $F(t) = f(\cos t, \sin t)$  où  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec pour tout  $t \in \mathbb{R}$ :

$$F'(t) =$$

### Remarques (Interprétation géométrique du gradient)

On considère la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $z = f(x, y)$ .

On appelle courbe de niveau de  $f$  de niveau  $\lambda$  l'ensemble  $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = \lambda\}$ .

Supposons que  $\mathcal{C}_\lambda$  puisse être paramétrée par  $\gamma$  c'est-à-dire  $\mathcal{C}_\lambda = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) / t \in I\}$  donc  $f(\gamma(t)) = \lambda$  pour tout  $t \in I$ .

En dérivant, pour tout  $t \in I$ :

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t).$$

Géométriquement que  $\gamma'(t)$  (lorsqu'il est non nul) dirige la tangente au point de paramètre  $t$  de  $\mathcal{C}_\lambda$ .

**Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, dirigé dans le sens des pentes croissantes. Plus la pente est forte, plus le gradient est grand en norme.**

**Théorème (Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe)**

Soient  $U$  un ouvert **convexe** de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La fonction  $f$  est constante sur  $U$  si et seulement si pour tout  $a \in U$ ,  $df(a) = 0$  (ou encore  $\nabla f(a) = 0$ ) c'est-à-dire pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ .

**NB** : abus de notation,  $df(a) = 0$  signifie  $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$  et  $\nabla f(a) = 0$  signifie  $\nabla f(a) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})}$ .

**Théorème (Composition  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ )**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $x_1, \dots, x_p$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  telles que :

$$\forall u \in V, \quad (x_1(u), \dots, x_p(u)) \in U.$$

Alors la fonction

$$F : u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u), \dots, x_p(u)) = F(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  et pour tout  $u \in V$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(u), \dots, x_p(u)).$$

**⚠ Attention ⚠** Le plus difficile au début pour appliquer ces formules est de ne pas se mélanger dans les notations : choix des noms de variables, de fonction.

**Méthode pratique (Cas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )**

Soient  $U, V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .

Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :  $\forall (u, v) \in V, \quad (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$ .

Alors la fonction  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  avec pour tout  $(u, v) \in \Omega$ . On note alors  $(u, v)$  les variables de  $F$  et  $(x, y)$  celles de  $f$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{cases}$$

On écrit parfois pour alléger

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

L'inconvénient de ces formules est que l'on ne sait plus qui dépend de quoi.

## Exemples.

1) Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On pose pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(u, v) = f(u^3 + v, uv - v^3)$ .  
Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer ses dérivées partielles.

2) **A connaître** Passage de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Soit  $R > 0$  et  $f \in \mathcal{C}^1(B(0, R))$ . Pour tout  $(r, \theta) \in ]-R, R[ \times \mathbb{R}$ , on pose  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[ \times \mathbb{R}$  et calculer ses dérivées partielles.

On exprimera les dérivées partielles de  $F$  en fonction de celles de  $f$  et inversement celles de  $f$  en fonction de celles de  $F$ .

## I.4 Application aux équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont la généralisation des équations différentielles au cas de plusieurs variables. Elles proviennent la plupart du temps de la modélisation de phénomènes concrets: physiques, mécaniques, biologiques... Citons deux EDP classiques.

- Équation des cordes vibrantes:  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  où  $y(t, x)$  la fonction inconnue représente la position verticale à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  d'une corde vibrante mesurée par rapport à sa position au repos.
- Équation de la chaleur:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  où  $T(t, x)$  la fonction inconnue représente la température à la position  $x$  et à l'instant  $t$  dans un milieu dans lequel la chaleur se propage par conduction.

### Exemples.

1) Trouver les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3 + y \quad (E)$$

2) Trouver les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + xy \quad (E)$$

en effectuant le changement de variables  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ .

## II Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

### Définition

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ . On suppose que  $f$  admet des dérivées partielles.

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  possède une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  en  $a$ , on la note  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  ou  $\partial_{ij} f(a)$ .

**NB :**  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$  est noté  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ .

⚠ **Attention** ⚠ À l'ordre  $\partial x_i \partial x_j$  ou  $\partial x_j \partial x_i$ .

### Définition (Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ )

$f$  est dit **de classe  $\mathcal{C}^2$**  sur l'ouvert  $U$  si les dérivées partielles secondes existent et sont continues sur  $U$ .  
On note  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  leur ensemble.

### Théorème (Structure de $C^2(U, \mathbb{R})$ .)

$C^2(U, \mathbb{R})$  est sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^U$  stable pour le produit.

**Exemple** Soit  $f(x, y) = e^{xy^2}$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^2 e^{xy^2} & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy e^{xy^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^4 e^{xy^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= (2y + 2xy^3) e^{xy^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (2y + 2xy^3) e^{xy^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2x + 4x^2 y^2) e^{xy^2}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'alors  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  puis remarquons également que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . En réalité c'est un fait bien plus général.

### Théorème (de Schwarz)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ . Alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

**Preuve** - Hors-programme.  $\square$

**⚠ Attention ⚠** L'hypothèse  $f$  de classe  $C^2$  est essentielle, l'existence de dérivées secondes ne suffit pas. Par exemple soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$  la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  mais  $f$  admet des dérivées partielles secondes croisées différentes en  $(0, 0)$ .

### Définition (Matrice hessienne)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $a \in U$ . La **matrice hessienne** d'une fonction  $f$  de classe  $C^2$  en  $a$  est la matrice

$$H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}.$$

**NB** : en vertu du théorème de Schwarz, la matrice hessienne est symétrique.

**Exemple** - Déterminer la matrice hessienne de  $f : (x, y) \mapsto x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 10xy$  en  $(2, -2)$ .

### Théorème (Développement limité d'ordre 2)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$ . Alors  $f$  admet un **développement limité à l'ordre 2 au voisinage de  $a$**  c'est-à-dire pour  $h$  au voisinage de 0:

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a))^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

**⚠ Attention ⚠** Il y a dans cette formule un abus de notation (c'est celle qui apparaît officiellement dans le programme) le vecteur  $h$  étant un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  et non une matrice colonne, la notation  $h^\top$  ne veut rien dire. Dans

la notation  $h^\top H_f(a)h$  il faut comprendre que l'on a identifié le vecteur  $h$  avec la matrice colonne de ses coordonnées (dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ). On peut réécrire cette formule à l'aide du produit scalaire usuel

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(h, H_f(a)h) + o(\|h\|^2).$$

**Explication** Ce développement limité généralise celui connu pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  en  $a \in I$ , pour  $h$  au voisinage de 0

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2).$$

**Exemple** - Écrire le développement limité à l'ordre 2 de  $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 10xy$  en  $(2, -2)$ .

### III Extrema

#### Définition (Extremum local)

Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in A$ .

- $f$  admet un **maximum (resp. minimum) global** en  $a$  si  $f$  est majorée (resp. minorée) par  $f(a)$  sur  $A$ , c'est-à-dire :

$$\forall u \in A, \quad f(u) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(u) \geq f(a)).$$

- $f$  admet un **maximum (resp. minimum) local** en  $a$  si  $f$  est majorée (resp. minorée) par  $f(a)$  au voisinage de  $a$  i.e. s'il existe un ouvert  $r > 0$  tel que tel que

$$\forall u \in A \cap B(a, r), \quad f(u) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(u) \geq f(a)).$$

- Un maximum ou un minimum local (resp. global) est appelé **extremum local (resp. global)**.

#### Théorème (Sur un ouvert : extremum $\Rightarrow$ Critique)

Soient  $U$  un **ouvert** de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ . Si  $f$  présente un extremum local en  $a \in U$  alors

$$df(a) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \nabla f(a) = 0$$

c'est-à-dire que les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  sont nulles.

Les points  $a$  vérifiant  $df(a) = 0$  (ou  $\nabla f(a) = 0$ ) sont appelés **points critiques**.

#### ⚠ Attention ⚠

- La réciproque est fautive, un point critique n'est pas nécessairement un extremum local.  
Contre-exemple :  $f(x, y) = x^3$  ou  $g(x, y) = x^2 - y^2$ .
- L'hypothèse " **$U$  est ouvert**" est très importante.  
Contre-exemple :  $f(x, y) = x + y$  sur le "losange"  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq |x| + |y| \leq 1\}$ .

#### Théorème (Condition d'existence/non existence d'un minimum)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

- Si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement positives, alors  $f$  atteint un minimum local strict en  $a$
- Si  $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'une des valeurs propres de  $H_f(a)$  est strictement négatives, alors  $f$  n'a pas de minimum en  $a$ .

En considérant  $-f$ , on obtient l'adaptation suivante au cas d'un maximum.

### Corollaire (Cas d'un maximum)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

- 1) Si toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement négatives, alors  $f$  atteint un maximum local strict en  $a$ .
- 2) Si l'une des valeurs propres de  $H_f(a)$  est strictement négative, alors  $f$  n'a pas de maximum en  $a$ .

### Méthode pratique (Cas $p = 2$ : utilisation de la trace et du déterminant)

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

Soient  $H$  la matrice hessienne de  $f$  en  $a$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  les deux valeurs propres alors

$$\det(H) = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{Tr}(H) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

- Si  $\det(H) > 0$  alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe et non nulles
  - Si  $\text{Tr}(H) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$  alors  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  et donc  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
  - Si  $\text{Tr}(H) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$  alors  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$  et donc  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .
- Si  $\det(H) < 0$  alors  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  (ou le contraire), alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a$ .
- Si  $\det(H) = 0$ , l'une des valeurs propres est nulle, on ne peut pas conclure.

**Exemples** - Pour illustrer le cas où l'une des valeurs propres est nulle

- 1)  $f(x, y) = x^2 + y^4, -f$ .
- 2)  $g(x, y) = x^2 + y^3$ .

### Méthode pratique (Pour déterminer des extremas locaux/globaux)

On détermine les extremas d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur une partie  $A$ .

- Si  $A$  est ouvert.
  - ▶ On cherche les points critiques  $a$ .
  - ▶ On calcule la hessienne  $H$  de  $f$  en chaque point critique et on étudie le signe des valeurs propres pour conclure, en appliquant le critère pratique dans le cas  $p = 2$ .
  - ▶ Pour les points critiques où on ne peut conclure, on étudie le signe de  $f(x) - f(a)$  au voisinage de  $a$ , ou plutôt le signe de  $f(a + h) - f(a)$  pour  $h$  au voisinage de 0 (le signe est plus facile à étudier dans ce cas) :
    - s'il est toujours positif,  $f$  atteint un minimum local en  $a$
    - s'il est toujours négatif,  $f$  atteint un maximum local en  $a$
    - sinon, c'est un point-selle.
- Si  $A$  est fermé-borné, la fonction est bornée et atteint ses bornes (parfois la démarche est guidée, sinon on applique le plan suivant)
  - ▶ Dessiner  $A$ .
  - ▶ On cherche les extremas sur l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  (qui est ouvert) en se ramenant au cas précédent.
  - ▶ On étudie les extremas sur la frontière.
  - ▶ On fait le bilan des deux études.

**Exercice.**

- 1) Étudier les extremas  $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 10xy$  en  $(2, -2)$  sur  $\mathbb{R}^2$
- 2) Étudier les extremas de  $f(x, y) = x^2 - 2x + xy + y^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 3) Étudier les extremas de  $f(x, y) = (x - y)^2 - xy$  sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x + y \leq 1\}$ .
  - a- Dessiner  $A$ .
  - b- Justifier que le maximum et le minimum global sont bien atteints sur  $K$  et qu'ils sont nécessairement atteints sur la frontière de  $K$ .
  - c- Déterminer ce maximum et ce minimum. *On pourra décomposer la frontière en trois parties.*
- 4) Étudier les extremas de  $f(x, y) = x^2 + xy^2 - x$  sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - a- Dessiner  $A$ .
  - b- Justifier que le maximum et le minimum global sont bien atteints sur  $K$  dont au moins un des deux sur la frontière.
  - c- Déterminer ce maximum et ce minimum. *Indication :  $(x, y)$  est sur la frontière de  $D$  si et seulement s'il l'écrit.*