Voici des planches complètes, retours des étudiant(e)s de la PC promo 2024-2025. Remercions les de ce travail et de leur contribution à votre formation !

Planche 1 - CCINP - Aya

Exercice préparé - 20min

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = AM + MA.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A et $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de $A^\top$. On pose $U = XY^\top$.
   - -a- Montrer que U est non nulle.
   - -b- Montrer que U est un vecteur propre de φ.
3) On considère maintenant un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\varphi(M) = \lambda M$.
   - -a- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(\lambda I_n - A)^k$.
   - -b- En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(\lambda I_n - A)$.
   - -c- Montrer que $\chi_A(\lambda I_n - A)$ n'est pas inversible.
   - -d- Montrer alors que λ s'écrit comme somme de deux valeurs propres de A.
4) Déterminer alors le spectre de φ.

Exercice non préparé - 10min

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$. f admet-elle un minimum local? f admet-elle un minimum global.

Planche 2 - CCINP - Clément

Exercice préparé - 20min

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et λ un réel. On pose M_n et C les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \det(\lambda I_n - M_n + xC) \end{array}$.

1) Montrer que M_2 est diagonalisable.
2) Calculer $f_\lambda(2)$.
3) A l'aide d'opérations sur les colonnes, exprimer f_λ avec des x uniquement dans la première colonne du déterminant. Puis montrer que f_λ est affine.
4) Calculer $f_\lambda(1)$, puis trouver l'expression de f_λ.
5) Trouver l'expression de χ_{M_n} puis en déduire les valeurs propres réelles de M_n.

Exercice non préparé - 10min

1) Résoudre l'équation (E) : $y'' - y = \mathrm{e}^{-x}$.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Planche 3 - CCINP - Ahmed

Exercice préparé - 20min

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Rappel : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x)$.

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   Rappeler la loi de X. En déduire $E(\frac{1}{X}) = -\frac{p\ln(p)}{1-p}$.
2) On considère une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset [1, +\infty[$.
   On note $X(\Omega) = \{x_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X = x_k)$.
   On pose $F_X : t \mapsto E(\mathrm{e}^{-tX})$.
   - -a- Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : t \mapsto p_k\,\mathrm{e}^{-tx_k}$.
     Montrons que $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   - -b- En déduire que F_X est définie sur $\mathbb{R}_+$ et donner le lien entre F_X et $\sum f_k$.
     Montrer que F_X est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3) -a- Montrons que f_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.
   - -b- Montrer que F_X est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et justifier que $\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t = E(\frac{1}{X})$.
4) On reprend X comme dans la question 1). Retrouver le résultat de la question 1) à l'aide de la question 3).
5) ???

Exercice non préparé - 10min

On cherche les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x})y'(x)+(2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x})y(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}-x\quad (E_1)$$

1) Montrer que si y vérifie (E_1) alors y vérifie l'équation :
$$(E_2)\quad y''+3y'+2y=1-\mathrm{e}^{-x}\,.$$
2) En déduire la résolution de (E_1).

Planche 4 - CCINP - Natacha

Exercice préparé - 20min

On pose E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f\in E$, on pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $t\mapsto\ln(t+\sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
   - -a- Montrer que $(n+1)I_n=a+b\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ où a et b sont à déterminer.
   - -b- Montrer que : $I_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$.
3) On pose l'application $\Phi:f\mapsto\widetilde{f}$.
   - -a- Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
   - -b- Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.
     Montrer que : $\operatorname{Im}\Phi=\{g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})\ /\ g(0)=0\}$.
4) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Résoudre l'équation différentielle $\lambda y'(x)=\dfrac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire les valeurs propres de Φ.

Exercice non préparé - 10min

1) Trouver le module et un argument de $a=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation : $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^n=a$ où $z\in\mathbb{C}$.

Planche 5 - CCINP - Eloi

Exercice préparé - 20min

Soient deux réels α et β de $]0,1[$.

Un joueur passe une série de tests identiques.
A chaque test qu'il doit passer, il doit se qualifier. Tant qu'il se qualifie, il passe le test. Le jeu s'arrête lorsqu'il ne se qualifie pas. La probabilité de ne pas se qualifier est $\alpha\in]0,1[$.
Lorque qu'il passe chaque test, il a une probabilité β de le réussir (il doit ensuite se qualifier pour passer le test suivant).

On note X le nombre de tests passés; Y le nombre de tests réussis.

1) Soit $r\in\mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^n$ est 1.
   On note $S_r(x)=\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n$.
2) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on définit l'événement E_k : "le joueur s'est qualifié pour le test k".
   Montrer que $(X=n)=E_1\cap\cdots\cap E_n\cap\overline{E_{n+1}}$.
   Déterminer alors la loi de X.
3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$.
4) Montrer : $\forall r\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ (1-x)S_{r+1}(x)=xS_r(x)$.
   Exprimer alors $S_r(x)$.
5) Soit $r\in\mathbb{N}$. Déterminer deux réels a et b tels que
$$P(Y=r)=a\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}b^n.$$
   Déterminer alors la loi de Y.

Exercice non préparé - 10min

Soient a,b,c des réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. On pose $M=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$

1) Calculer le rang de M.
2) M est-elle diagonalisable? Détermminer ses valeurs propres.
3) *Question possible* : montrer que M est la matrice d'un projecteur orthogonal.

Planche 6 - CCINP - Oscar

Exercice préparé - 20min

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $I_n=\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

1) Déterminer le développement limité à l'ordre de 3 de tan au voisinage de 0.
2) -a- On pose $f(x)=\tan(x)-x$. Montrer qu'il existe un unique $x_n\in I_n$ tel que $f(x_n)=0$.
   - -b- Montrer que $x_n\underset{+\infty}{\sim}n\pi$.
3) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $y_n=x_n-n\pi$.
   - -a- Montrer que $y_n=\operatorname{Arctan}(x_n)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}y_n$.

-b- Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} y_n - \dfrac{\pi}{2}$.
En déduire que : $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4) -a- Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) + x_n}$.

-b- En déduire que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\pi n^2}$.

-c- Déterminer alors un développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice non préparé - 10min

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe D diagonale et P inversible tel que $D = P^{-1}AP$. On déterminera D mais pas P.
2) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA$.
Montrer que si X est un vecteur propre de A alors X est vecteur propre de B.
3) *Dernière question possible* Déterminer alors B à l'aide de P. On pourra introduire X_1, X_2, X_3 les colonnes de P et écrire $P = (X_1|X_2|X_3)$.

Planche 7 - CCINP - Aymery

Exercice préparé - 20min

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle la définition

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^\top M X \geqslant 0\right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable pour l'addition et la multiplication par un réel positif.
2) -a- Soit $U \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que $UU^\top \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
-b- Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$.
3) On définit le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$.
Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
-a- On pose la matrice $C = A \otimes B = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$
On pose $X = (x_1 \cdots x_n)^\top$ et $D = \mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)$.
Montrer que $X^\top C X = \langle DAD, B\rangle$.
-b- Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\langle MA, B\rangle = \langle A, MB\rangle \qquad \langle AM, B\rangle = \langle A, BM\rangle.$$
4) On suppose de plus que A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
-a- Montrer qu'il existe deux matrices A', B' de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = A'^2$ et $B = B'^2$.
-b- Que peut-on dire de C?

Exercice non préparé - 10min

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = 3^n \sin^3\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.
Montrer la convergence puis calculer la somme de $\sum u_n(x)$.

Planche 8 - CCINP - Aristide

Exercice préparé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ et si I_n existe on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

1) Justifier l'existence de I_n. Calculer I_0 et I_1.
2) -a- Étudier la monotonie de (I_n).
-b- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^2$.
3) -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$
-b- En déduire le rayon de convergence de la série $\sum I_n x^n$.
4) Déterminer l'ensemble de définition de f. On le note $\mathcal{D}_f$.
5) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ où g est une fonction à déterminer.

Exercice non préparé

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de M.
2) Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes en fonction de a, b, c.
3) ??*Question possible* On pose $a = 0$. Déterminer des conditions sur b et c pour que M soit diagonalisable.

Planche 9 - CCINP - Louis

Exercice préparé - 20min

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. On note $l \in \mathbb{C}$ sa limite.
L'objectif est de prouver le résultat suivant :

$$(L) \quad \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^l .$$

1) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$.
2) Dans cette question on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Montrer le résultat (L).
3) On revient au cas d'une suite complexe. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = z \in \mathbb{C}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les deux polynômes P_n et Q_n définies par

   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \qquad Q_n(z) = P_n(z) - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n .$$

   -a- Montrer que Q_n est un polynôme à coefficients réels positifs.
   -b- Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |Q_n(z)| \leqslant Q_n(|z|).$$

   En déduire une majoration de $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right|$ puis le résultat (L).
4) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe de limite nulle.
   Montrer que :

   $$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |(1+\alpha)^n - 1| \leqslant (1+|\alpha|)^n - 1.$$

   En déduire la propriété (L).
5) On revient au cas général où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$.
   En écrivant $u_n = (u_n - l) + l$, déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{l}{n}\right)^n \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n .$$

   En déduire le résultat (L).

Exercice non préparé - 10min

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que u est autoadjoint.
Démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(u) = \{x \in E \ / \ \langle x, u(x)\rangle = 0\}.$$

Planche 10 - CCINP - Cindy

Exercice préparé - 20min

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

1) Montrer que : $\forall t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.
2) -a- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\quad \forall n \geqslant n_0$, $x \in [0, \sqrt{n}]$.
   -b- En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers h.
   -c- Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|h_n(x)| \leqslant h(x)$.
3) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   -a- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge.
   À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{n}\sin(t)$, montrer que

   $$\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

   -b- En déduire que :

   $$\sqrt{n} I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u.$$
4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.
5) On admet que : $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
   Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

NB : *il peut être utile de savoir prouver $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$. Pour cela, prouver d'abord que la suite (I_n) est décroissante.*

Exercice non préparé - 10min

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel $|z| = 1$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$ un argument de z.

1) Calculer $|1+z|$.
2) A quelle condition sur θ telle que $|1+z| \leqslant 1$.

Planche 11 - CCINP - Gabriel

Exercice préparé - 20min

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1) Soit $A > 0$ et $x > 0$. Montrer que :

   $$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\cos(A)}{A+x} - \int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

2) -a- Soit $x > 0$. Montrer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

-b- Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3) -a- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

-b- Pour $x > 0$, exprimer simplement $g''(x) + g(x)$.

4) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$. On pourra utiliser : $\displaystyle\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice non préparé - 10min

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Posons $(S) \begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+ac+bc=5 \\ abc=2 \end{cases}$.

1) Déterminer $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ où (a,b,c) solution de (S).
2) Résoudre le système.

Planche 12 - CCINP - Solène

Exercice préparé - 20min

Soit λ un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1) Donner l'expression de $P(X=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) -a- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

-b- Déterminer la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y''+y'+y = \mathrm{e}^x \\ y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \end{cases}$.

3) On pose E_λ : "X est divisible par 3".

-a- On pose $g(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda)$. Écrire $g(\lambda)$ sous forme de somme d'une série entière.

-b- À l'aide de 2)-b-, montrer que :

$$g(\lambda) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) + \frac{\mathrm{e}^\lambda}{3}.$$

En déduire $P(E_\lambda)$.

4) -a- Déterminer la limite de $P(E_\lambda)$ en 0 et en $+\infty$.

-b- Donner un équivalent simple en 0 de $1 - \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda)$.

Exercice non préparé - 10min

Soit E un espace vectoriel dimension finie et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire surjective.
On pose $H = \operatorname{Ker}\varphi$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $H \oplus \operatorname{Vect}(x_0) = E$.

NB : *l'énoncé me paraît court. Autre question possible : traiter cet exercice dans le cas où E n'est pas de dimension finie.*

Planche 13 - CCINP - Vincent

Exercice préparé - 20min

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable? Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) -a- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que l'on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

-b- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 2$.

3) -a- On pose pour tout $t \in]-1,1[$, $g(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(A^k)}{k} t^k$. Calculer $g(t)$.

-b- Montrer que : $\forall t \in]-1,1[$, $\det(I_n - tA)\exp(g(t)) = 1$.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de M et $n_1, \ldots, n_p$ leurs multiplicités respectives.
On note $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\lambda_i|$.

-a- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(M^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \lambda_i^k$.

-b- Soit $t \in]-1,1[$. Déterminer une expression de $\det(I_n - tM)$ en fonction de n_i, λ_i, p et t.

5) On s'intéresse à la série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(M^k)}{k} r^k$. On note R son rayon de convergence et S sa somme.
Montrer que si $m \neq 0$ alors $R \geqslant \dfrac{1}{m}$. Que vaut R dans le cas où $m = 0$?

6) Montrer que $S(t) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \ln(1 - \lambda_i t)$. En déduire que $\det(I_n - tA)\exp(S(t)) = 1$.

Exercice non préparé - 10min

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Planche 14 - CCINP - Julien

Exercice préparé - 20min

Soit $p\in]0,1[$ et on pose $q=1-p$.
On lance une pièce avec probabilité p d'obtenir Pile et on note j le rang d'obtention du premier Pile.
On place ensuite j boules numérotées de 1 à j dans une urne et on note X le numéro de la boule tirée.
On note G l'événement : "obtenir une boule de numéro impair".

1) Donner la loi, l'espérance et la variance du rang d'obtention du premier Pile.
2) Montrer qu'il existe des réels a,b,c tels que :

$$\forall t\in]-1,1[,\quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{a}{(1-t)^2}+\frac{b}{1-t}+\frac{c}{1+t}.$$

3) Soit $j\in\mathbb{N}^*$.
   -a- Calculer la probabilité de l'événement G sachant qu'on a obtenu pile au rang $2j$.
   Calculer la probabilité de l'événement G sachant qu'on a obtenu pile au rang $2j-1$.
   -b- Montrer que

$$P(G)=\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(j\int_0^q t^{2j-2}(t+1)\,\mathrm{d}t\right).$$

4) Ecrire alors $P(G)$ sous forme d'une intégrale.
5) Calculer cette intégrale à l'aide de la question 2).
6) A-t-on plus de chance de gagner ou de perdre et y a t-il des conditions idéales pour gagner?

Exercice non préparé - 10min

On considère la série entière $\sum(-1)^n\frac{z^n}{(n!)^2}$. On note f la somme.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) *Question possible* : montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Planche 15 - CCINP - Allan

Exercice préparé - 20min

Soit $\varphi: x\mapsto -x\ln(x)$.
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $p_n=P(X=n)$.
Lorsque la série $\sum\varphi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie. La somme de cette série est alors appelée entropie de X.

1) Tracer le tableau de variations de φ, et montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 .
2) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.
   Montrer X admet une entropie et la calculer.
3) Retour au cas général et on suppose que X est d'espérance finie.
   -a- Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   -b- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(p_n)\leqslant\max(np_n, n\,\mathrm{e}^{-n})$.
   -c- Montrer que X admet une entropie.

Exercice non préparé - 10min

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n=0_n$.

1) En supposant que $M=M^T$, montrer que $M=0_n$.
2) En supposant que M et M^T commutent, montrer que M est toujours nulle.

Planche 16 - CCINP - Martin

Exercice préparé - 20min

Soit $\alpha\in]0,1[$. On note $A=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.
2) -a- Déterminer $P\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tel que $P^\top AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\alpha\end{pmatrix}$.
   -b- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A appartienne à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Soient $\alpha\in]0,1[$ et $\beta\in]0,1[$. On note $B=\begin{pmatrix}1-\alpha & \beta\\ \alpha & 1-\beta\end{pmatrix}$.

3) Montrer que B est diagonalisable et déterminer $Q\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit diagonale.
4) Montrer que $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de Q.

Soient a,b,c,d des rééels strictement positifs et $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

4) Montrer que M est diagonalisable et qu'elle est semblable à une matrice $\Delta=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ avec $\mu>0$ et $\lambda<\mu$.
5) ??

Exercice non préparé - 10min

On étudie la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2) Calculer la somme de cette série.

Planche 17 - CCINP - Isaure

Exercice préparé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Gamma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1\}.$$

1) Montrer que $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$.
Établir : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = (x+\alpha y)^2 + (1-\alpha^2)y^2$.
2) Montrer que Γ_α est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que Γ_1 est la réunion de de deux droites.
De même pour Γ_{-1}.
4) On pose $\begin{array}{cccc} \Phi_\alpha : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x,y),(x',y')) & \mapsto & xx' + 2\alpha(xy' + x'y) + yy' \end{array}$.
   -a- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $]-1,1[$ pour que Φ_α soit un produit scalaire.
   -b- ??

Exercice non préparé

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.
Montrer que
$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} R_n.$$
2) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$\forall n \geqslant N, \quad 0 < R_n < \frac{1}{2}.$$
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(2\pi n! \, \mathrm{e}) = \sin(2\pi R_n)$.
4) En déduire que e est irrationnel.

Planche 18 - CCINP - Daphnée

Exercice préparé - 20min

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer f' et f''.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$
On justifiera que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.
3) *Question possible.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et son coefficient dominant vaut 1.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$.
   -a- Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,
   $$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_{n,k} \geqslant 0.$$
   -b- En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$
5) ???

Exercice non préparé - 10min

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que la série $\sum \ln(1+a_n)$ diverge.
2) En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k) = 0.$$

Planche 19 - IMT - Clément

Exercice 1

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} \, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Dans une population, la proportion de gens contaminés par une certaine maladie est p où $p \in]0,1[$.
Si on rencontre une personne contaminée, la probabilité que l'on se fasse contaminer est $\dfrac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un commercial non contaminé rencontre n clients.
Posons N la variable aléatoire égale au nombre de clients contaminés qu'il rencontre.

1) Quelle est la loi de N?
2) Quelle est la probabilité que le commercial soit contaminé?

Planche 20 - IMT - Clélia

Exercice 1

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.
On suppose que : $\forall x \in E, < u(x), x >= 0$.

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = - < u(y), x >$.
2) Que peut-on dire de la matrice associée à u dans une base orthonormée de E.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $(E_n) : x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

1) Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera x_n.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.
   En déduire la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite.
3) Montrer que $x_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Planche 21 - IMT - Daphnée

Exercice 1

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $(E) \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$.
Question possible : déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 2

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E.
On suppose

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{Id}_E \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1) Montrer que pour tout $i[\![1,n]\!]$, f_i est un projecteur de E.
2) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$.

Planche 22 - IMT - Hugo

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 - 5u - 6\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 6\,\mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2) Calculer la limite de u_n.

Planche 23 - IMT - Martin

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 2

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

1) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
2) -a- Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ tel que $M = AB$.
   -b- En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
3) On pose $C = M + I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de C. En déduire une condition pour que C soit inversible puis l'expression de l'inverse.

Planche 24 - IMT - Vincent

Exercice 1

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la première colonne, la dernière colonne et la diagonale sont composées de 1. Les autres coefficients sont nuls.

1) Déterminer $\mathrm{rg}(N)$, une base de $\mathrm{Im}(N)$ et une base de $\mathrm{Ker}(N)$.
2) Déterminer le spectre de N. N est-elle diagonalisable?

Exercice 2

Soient A et B deux archers à un concours de tir à l'arc.
A tire en premier et touche la cible avec probabilité a où $a \in]0,1[$.
Si A rate, B tire et touche la cible avec probabilité b où $b \in]0,1[$.
Le concours s'arrête lorsque l'un des archers a touché la cible.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à l'instant $2n+1$.
2) Déterminer la probabilité que le joueur A gagne.
3) Déterminer la probabilité que le joueur B gagne.
4) Déterminer la probabilité que la partie ne s'arrête pas.
5) On pose la variable aléatoire T comme le lancer où la partie s'arrête. Calculer l'espérance de T.

Planche 25 - IMT - Ahmed

Exercice 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge et calculer I_n.
2) Justifier que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $A(t)$ est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale $D(t)$ et une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tel que : $A(t) = PD(t)P^\top$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer $A(t)^n$.

Planche 26 - IMT - Oscar

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

1) Montrer que : $\displaystyle\int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)}{\cos^{2n}(x)+\sin^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A + A^{-1} = I_n$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$.
Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k + A^{-k}$.

Planche 27 - IMT - Solène

Exercice 1

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $xf'' + f' - xf = 0$.

Exercice 2

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel préhilbertien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Soit $f : E \to E$ une application telle que

$$f(0_E) = 0_E \qquad \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1) Montrer que f conserve le produit scalaire.
2) En déduire que f est linéaire.
   De quel type d'endomorphisme s'agit-il?
3) *Question inconnue.*

Planche 28 - IMT - Zoé

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable?
2) On pose $M = A + I_n$.
   -a- Calculer M^2.
   -b- En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3) Déterminer les valeurs propres de A et de M.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [-1,1]$, on pose $f_n(t) = \sin(\pi t)t^n$.

1) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$. On note F sa somme.
   La convergence est-elle uniforme?
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.