Exercices types oraux CCINP - IMT

Analyse

Exercice 1 -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.
On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1) Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0; +\infty[$. On la note x_n.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, 1]$.
3) Montrer que la suite (x_n) est croissante (on pourra comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$).
4) Démontrer que la suite (x_n) converge puis déterminer sa limite.

Indications et réponses

1) On applique le théorème de la bijection monotone, en citant bien toutes les hypothèses.
2) Calculer $f_n(1)$, quel est son signe?
3) Pour $x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x)..??..0$ et prendre $x = ...$
4) Objectif : passer à la limite $x_n^n + x_n - 1$. Discuter $l < 1$, $l = 1$.

Exercice 2 -

Etudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$.

Indications et réponses *Si $\alpha \leqslant 0$, u_n n'existe pas, radicande strictement négatif ou dénominateur nul.*
Étudier la convergence absolue. Faire le reste par un développement asymptotique de u_n.
Si $\alpha > 1$, convergence absolue.
Si $\alpha \in]0, 1[$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right).$$

Bilan : $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > \frac{1}{3}$.

Exercice 3 - IMT

1) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)$.
2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(4n^2 - 1)}$.

Indications et réponses

*1) **Méthode 1 (qui est plus celle attendue ici)** : on utilise le résultat : "la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge".*
Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, à l'aide d'un développement asymptotique. On trouve : $-\frac{1}{2n^2}$.
***Méthode 2** : on utilise le théorème de la limite monotone.*
Pour étudier la monotonie et la minoration on aura besoin de l'encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2) On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(4X^2-1)}$, on utilise la "multiplication-évaluation" :

$$\frac{1}{X(2X-1)(2X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2X-1} + \frac{1}{2X+1}.$$

On étudie la somme partielle : $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ où $a_n = \frac{1}{n(4n^2-1)}$.
Utiliser la réécriture de la "somme sur les indices impairs", $\sum_{n=1, n \text{ impair}}^{2N-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1, n \text{ pair}}^{2N} \frac{1}{n}$.
On trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2\ln(2) - 1$.

Exercice 4 - IMT

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2\ln(n+a) - \ln(n+b) - \ln(n+c)$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.
2) Etudier la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Indications et réponses *Ecrire un développement asymptotique de u : $u_n = (2a - b - c)\frac{1}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$, utile pour les questions 1) et 2).*

1) $\sum u_n$ CV ssi $2a - b - c \neq 0$.
2) $\sum (-1)^n u_n$ sans conditions.

Exercice 5 - CCINP - Majeur

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

1) Donner le tableau de variation de la fonction sin sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2) -a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   -b- Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
3) Montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^3}{6}$.
   Que dire de la série de terme général u_n^3 ?
4) Montrer que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$.
5) On admet le lemme de Césaro : Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.
   Alors $(c_n)_n$ converge vers l.
   Donner un équivalent de $(u_n)_n$.

Indications et réponses

1)

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f	0	$\nearrow$	1

2) -a- Vérifier d'abord que $]0, \frac{\pi}{2}]$ *est stbale par* sin. *Qu'en déduire sur* u_n *?*
Montrer que : $\forall x[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leqslant x$ *et égalite seulement pour* $x = 0$. *Prendre alors* $x = u_n$.
-b- Théorème de la limite monotone + point fixe de sin.

3) Écrire le $DL_3(0)$ *de* sin.
Reconnaître une série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

4) Ecrire v_n *comme un quotient et déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur.*

5) Appliquer le lemme de Cesaro à la suite (v_n).
On trouve $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 6 - CCINP - Majeur

Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(a) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a^k}{1+a^k}$.

1) Etudier la convergence de la suite $(u_n(a))_n$.
2) Déterminer la limite de $(u_n(a))_n$ pour $a \in]0; 1]$.
3) Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x)$.
4) Etudier la convergence de la suite $(-\ln(u_n(a))_n$ pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
5) Trouver une valeur de a pour laquelle la suite $(u_n(a))_n$ ne converge pas vers 0.
6) Question de probas.

Indications et réponses

1) Etudier la monotonie de $(u_n(a))$ *et montrer que la suite est minorée.*
2) Majorer $u_n(a)$ *en utilisant* $1 + a^k \geqslant 1$.
3) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4) Distinguer $a < 1$, $a = 1$ *et* $a > 1$.
Dans le cas $a > 1$, *se ramener à la nature d'une série dont on étudie un équivalent du terme général.*
5) $a > 1$.

Exercice 7 -

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont bornées. On pose $M_0(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ et $M_2(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1) Justifier l'existence de $M_0(f)$ et $M_2(f)$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0(f)}{h} + \dfrac{h}{2}M_2(f)$.
3) Justifier l'existence de $M_1(f)$.
4) Montrer que $M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}$.

Indications et réponses

1) Facile.
2) Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} \sup_{[x,x+h]} |f''|.$$

En déduire une majoration de $|hf'(x)|$ *par inégalité triangulaire.*
3) Utiliser 2).
4) Passer au sup x *pour* h *fixé. Puis, choisir un* h *convenable qui donne exactement le bon majorant (il faudra discuter selon que* $M_2(f)$ *s'annule ou non).*

Exercice 8 -

On recherche les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 + x$$

1) Montrer que, si f vérifie (1), alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de $(E) :\ y'' + y = 0$.
2) Résoudre (E).
3) Conclure.

Indications et réponses

1) Isoler f, *"éclater" l'intégrale pour prouver que* f *est* $\mathcal{C}^1$. *Dériver.*
Recommencer en dérivant f'.
2) $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.
3) Synthèse. Conclusion : $x \mapsto \cos x + \sin x$.

Exercice 9 - CCINP - Majeur

Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on considère le polynôme $P_t = X^3 + tX - 1$.

1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, P_t admet une unique racine réelle (on pourra commencer par étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 + tx - 1$).
   On note $u(t)$ cette racine; on a donc $P_t(u(t)) = 0$.
2) -a- Donner la valeur de $u(0)$.
   -b- Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 < u(t) \leqslant 1$.
   -c- Soient t_1 et t_2 deux réels positifs tels que $t_1 < t_2$. Montrer que, pour $x > 0$, $P_{t_1}(x) < P_{t_2}(x)$.
   En déduire que u est strictement monotone et donnez ses variations.
3) Montrer que u admet une limite finie en $+\infty$.
4) En considérant, pour $t > 0$, $P_t(1/t)$, déterminer la limite de u en $+\infty$.
5) Montrer que u est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0; 1]$ et donner, pour $y \in]0; 1]$, l'expression de $u^{-1}(y)$.
6) Tracer sur un même graphique l'allure des fonctions u et u^{-1}.
7) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et donner une expression de $u'(t)$ en fonction de $u(t)$.

Indications et réponses *Ressemble aux exercices sur les suites implicites.*

1) *Application scrupuleuse du TBM.*
2) -a- $u(0) = 1$
   -b- *Calculer* $g(0)$*,* $g(1)$ *et utiliser la monotonie de* g*.*
   -c- *Etudier le signe de* $P_{t_2}(x) - P_{t_1}(x)$*. Puis prendre une bonne valeur de* x*, et utiliser la monotonie de* P_t*.*
   u *est strictement décroissante.*
3) *TLM*
4) *Signe de* $P_t(1/t)$ *pour en déduire* $u(t) \leqslant \frac{1}{t}$*.*
   $u(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
5) $u(t) = y$ *vérifie :* $y^3 + ty - 1 = 0$*.* $u^{-1}(y) = \dfrac{1 - y^3}{y}$.
6)
7) *Appliquer le théorème de la dérivée de la réciproque à* u^{-1} *pour prouver la dérivabilité de* u*.*
   Dériver par rapport à t *:* $u(t)^3 + tu(t) - 1 = 0$ *pour obtenir* $u'(t)$ *en fonction de* $u(t)$*. On obtient*

$$u'(t) = -\frac{u(t)}{3u(t)^2 + t}.$$

Exercice 10 - CCINP - Majeur

Soit $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

1) Etudier les variations de f et donner son graphe.
2) Déterminer le développement en série entière de f et donner son rayon de convergence.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Vérifier que $P_{n+1} = P_n' - XP_n$.
4) Déterminer P_0, P_1 et P_2.
5) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n, son degré et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède n racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ (on pourra raisonner par récurrence et étudier le signe de $P_n'(\alpha_i)$.

Indications et réponses

1)

x	0	$+\infty$
f	1 ↘	0

2) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} t^{2n}$*,* $R = +\infty$*.*
3) *Raisonnement par récurrence.*
4) $P_0 = 1$*,* $P_1 = -X$*,* $P_2 = X^2 - 1$*.*
5) $\deg(P_n) = n$*,* $CD(P_n) = (-1)^n$*.*
   Utiliser la relation de $P_{n+1} = P_n' - XP_n$ *pour déterminer* $\deg(P_{n+1})$ *et* $CD(P_{n+1})$ *en fonction de* $\deg(P_n)$ *et* $CD(P_n)$*.*
   Déterminer un équivalent de $P_n(t)$ *en* $\pm\infty$ *et distinguer la parité de* n*.*
6) *Dans l'hérédité de la récurrence, appliquer le théorème de Rolle sur* $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$*.*
   Montrer que P_{n+1} *s'annule une fois sur* $]-\infty, \alpha_1]$ *et* $[\alpha_n, +\infty[$*.*

Exercice 11 - CCINP - Majeur

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $g_n(x) = e^{-x} - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$

1) Etudier les variations de $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$
2) -a- Déterminer h_n telle que, pour $x \geqslant 0$, $g_n'(x) = e^{-x}h_n(x)$.
   -b- Etudier les variations de h_n sur $[0; n]$.
3) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0; n]$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$.
   Vérifier l'égalité $\left(1 - \dfrac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-\alpha_n}$.
4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = 0$ si $x > n$ et $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [0; n]$.
   -a- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
   -b- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

Indications et réponses

1)

x	0		1		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	0	↗	e^{-1}	↘	0

2) -a- $h_n(x) = e^x \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1} - 1$.

-b-

x	0		1		α_n		n
h'_n		$+$	0		$-$		
h_n	0	$\nearrow$	>0	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

3) TBM sur $[1,n]$ et h_n ne s'annule pas sur $]0,1]$.

4) -a- Limite usuelle à calculer en passant par l'écriture exponentielle. On trouve $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$

-b- Etudier les variations de g_n sur $[0,n]$.
Sur $[0,n]$, $|f_n(x)-f(x)|=|g_n(x)|\leqslant g_n(\alpha_n)\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.
Sur $[n,+\infty[$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
$\|f_n-f\|_\infty\leqslant \max(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n},\mathrm{e}^{-n})$.

Exercice 12 -

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto \cos^n(x)\sin(x)$.

1) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ et de $(nf_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} nf_n(t)dt$.
Montrer que la suite $(nf_n)_n)$ ne converge pas uniformément sur $[0;1/2]$.
3) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'_n.
4) Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f'_n(\arccos(\alpha_n))=0$.
5) Donner le tableau de variations de f_n sur $[0;\pi/2]$.
6) Montrer que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer $||f_n||_\infty$.
7) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Indications et réponses

1) Discuter $x\equiv 0\,[\pi]$ ou non. Elles convergent simplement toutes les deux vers la fonction nulle.

2) $\displaystyle\int_0^{1/2} nf_n(t)dt \underset{n\,\to\,+\infty}{\longrightarrow} 1$

3) $f'_n(x)=\cos^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x)-n)$.

4) $\alpha_n=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

5)

x	0		$\mathrm{Arccos}(\alpha_n)$		$\frac{\pi}{2}$
f'_n	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\mathrm{Arccos}(\alpha_n))$	$\searrow$	0

6) On peut se contenter d'étudier $|f_n|$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ car...
$||f_n||_\infty=\alpha_n^n\sqrt{1-\alpha_n^2}$.

7) $||f_n||_\infty \underset{n\,\to\,+\infty}{\longrightarrow} 0$ (calcul de limite par opération, équivalents...).
(f_n) CVU vers la fonction nulle.

Exercice 13 -

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1) Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2) Etudier la convergence normale de $\sum f_n$.

Indications et réponses

1) CVS sur $\mathbb{R}_+$. Distinguer $x=0$; $x>0$ (utiliser un équivalent dans ce cas).

2) Par étude de la fonction f_n, $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{2n^2}$.
CVN sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 -

Soit $S : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer que $x\mapsto \dfrac{S(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis préciser sa limite en 0.

Indications et réponses

1) CVS sur $\mathbb{R}$: distinguer $x=0$, $x\neq 0$ (équivalent dans ce cas).
Théorème de transfert de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Majorez $|u'_n(x)|$ indépendamment de x par un TG d'une série convergente.

2) Décroissance : prendre $x<y$, comparer les termes de la somme puis sommez.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+nx^2)}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(1+nx^2)}$. Passer à la limite quand $x\to 0$, puis $N\to+\infty$.
La limite en 0 est $+\infty$.

Exercice 15 -

Soit u la suite définie par $u_0=1$ et, pour $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1) Montrer que la suite est bien définie, décroissante et convergente.
2) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3/2}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
Montrer qu'il existe $c>0$ tel que
$\ln(v_n)=\dfrac{c}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3) En déduire qu'il existe $a>0$ tel que $u_n\sim\dfrac{a}{n^{3/2}}$.
4) Montrer que $S : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$ est définie sur $[-1;1]$.
5) Montrer que S est solution sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle $2x(1-x)y'+(3-2x)y=3$.
6) Résoudre cette équation différentielle sur $]0;1[$.

Indications et réponses

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ (par récurrence).
Puis TLM.

2) $c=\frac{15}{8}$. Calcule de développement asymptotique, on peut avoir intérêt à écrire $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, $\frac{2n+2}{2n+5}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{2n}}$.

3) Écrire $\ln(v_n) = \ln((n+1)^{3/2}u_{n+1}) - \ln(n^{3/2}u_n)$. Etudier alors la convergence de la série téléscopique $\sum \ln(v_n)$. Qu'en déduire sur la suite $\ln((n+1)^{3/2}u_{n+1})$? Conclure.

4) Rayon de CV : 1 à l'aide de l'équivalent. Étudier les cas $x=1$ et $x=-1$ à part.

5) Dériver terme à terme S remplacer, en décalant les indices là où il faut, et utiliser la relation de récurrence vérifiée par (u_n).

6) On a besoin d'un calcul de primitive de $a(x) = \frac{3-2x}{2x(1-x)}$ que l'on décompose en éléments simples : $a(x) = \frac{1}{2}(\frac{3}{x} + \frac{1}{1-x})$. SG de l'équation $x \mapsto \lambda \dfrac{(1-x)^{1/2}}{x^{3/2}} + S(x)$.

Exercice 16 -

Déterminer les solutions développables en série entière à l'équation différentielle $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 1$...

Indications et réponses

Exercice 17 - IMT

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ converge.

Indications et réponses *On n'oublie pas la continuité. On discute suivant le signe de β pour obtenir un équivalent en 0 et $+\infty$. L'intégrale converge si et seulement si*

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ -1 < \alpha < \beta - 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \beta < 0 \\ 1 - \beta < \alpha < -1 \end{cases}.$$

Exercice 18 - CCINP - Mineur

Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$.

1) Montrer que I et J existent.
2) Montrer que $I = J$.
3) Calculer I

Indications et réponses

1) Continuité + un équivalent simple en $+\infty$.

2) Changement de variable $t = ...$ On justifie bien.

3) On calcule $I + J$, on utilise la factorisation $1 + t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$. Pour intégrer $\frac{1}{t^2-t+1}$ on utilise la forme canonique, $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1\right)$

Exercice 19 -

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2}\ln(x)dx$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
2) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Indications et réponses

1) Continuité, étude en 0 (distinguer $n = 0$, $n > 0$), étude en 1 (faussement impropre).

2) Théorème de CV dominée. La fonction de domination est $|f_0|$.

Exercice 20 - CCINP - Mineur

1) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
2) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Indications et réponses

1) On pose $\varphi(t) = \dfrac{t^x}{1+t}$. Continuité de φ, étude en 0 à l'aide d'un équivalent. f est définie sur $]-1, +\infty[$.

2) On pose $u = t^{1/2}$. $f(1/2) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21 - IMT

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Indications et réponses *Pour $x \in]0, +\infty[$,*

$$\frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \sin x \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \sin x \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

où $f_n(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-nx}$.
Idée 1 *: on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme, qui oblige à prouver la convergence de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$. Or*

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} |\sin(t)|\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Par une IPP,..., on calcule :

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1} \text{ : TG d'une série CV}$$

Idée 2 *: on utilise le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t)$. On vérifie les trois prémières hypothèses naturelles. Pour la domination, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$|S_N(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)| = |\sin x| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{|\sin x|}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Et $x \mapsto \frac{|\sin x|}{\mathrm{e}^x - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ [...] Donc :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\,\mathrm{d}x.$$

Et

$$\int_0^{+\infty} S_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les complexes

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = ... = \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 22 - IMT

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3) Montrer que f est solution d'une équation différentielle et exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Indications et réponses *Poser* $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.

1) *Pour $x \in \mathbb{R}$. Continuité de $t \mapsto g(x,t)$, étude en 0 en majorant...*
2) *Appliquer le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.*
   $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt$.
3) *Par une IPP :* $f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0$.
   On résout en utilisant $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Exercice 23 - CCINP - Majeur

1) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} e^{-t^2}dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
   $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-x^2/\cos^2\theta}d\theta$.
   -a- Montrer que, pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\cos^2\theta \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que, pour tout $A \in \mathbb{R}^{+*}$, pour tout $x \in [-A; A]$, pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$,
   $$\left|\frac{2x}{\cos^2\theta}e^{-x^2/\cos^2\theta}\right| \leqslant 4A$$
   -b- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g'(x) = -2x\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(\theta)}e^{-x^2/\cos^2\theta}d\theta.$$
3) -a- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $g'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2u^2}du$ (on pourra poser $u = \tan\theta$).
   -b- Montrer que la fonction $f^2 + g$ est constante.
4) Etudier la limite de g en $+\infty$.
5) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Indications et réponses

1) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
2) -a- *Sur* $[0, \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
   Majorer l'exponentielle par 1 car...
   Immédiat pour le reste.
   -b- *Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. La domination utilise 2)-a-.*
3) -a- *Changement de variable donné.*
   -b- *Dériver f^2+g et utiliser le changement de variable $t = ux$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x$ pour la transformer en une intégrale $\displaystyle\int_0^1$.*
   On trouve la constante en prenant une valeur de x bien choisi : $f^2 + g = \frac{\pi}{4}$.
4) *Théorème de CV dominée à paramètre continu en utilisant l'expression originale de g. Domination facile.*
5) *3)-b- et 4) :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 24 - IMT

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
2) -a- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
   -b- En déduire $I_n \sim I_{n+1}$.
   -c- Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
3) La série $\sum I_n$ converge-t-elle?
4) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^kI_k$ converge et montrer que sa somme est égale à $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos(t)}dt$ (on commencera par exprimer les sommes partielles).

Indications et réponses *Un grand classique.*

1) *IPP classique.*
   On montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante.
2) -a- $I_{n+1} - I_n = ...$
   -b- *On divise l'encadrement $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ par I_{n+1}.*
   On n'oublie pas de justifier $I_{n+1} > 0$; on utilise la la relation de récurrence vérifiée par (I_n).
   -c- *Utiliser 1) et 2)-b-.*
3) *Utiliser 2)-c-.*

4) *CV : CSSA.*
Calcul de la somme : on remarque que pour $t \in]0, \pi/2]$

$$\frac{1}{1+\cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n(t).$$

Puis on applique le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n(t)$ *où* $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$.
On montre que : $\forall N,\ \forall t \in]0, \pi/2],\ |S_N(t)| \leqslant \frac{2}{1+\cos(t)}$.

Exercice 25 - CCINP - Majeur

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1) Montrer que, si $t \in [0; 1]$,
$$t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$
2) -a- Justifier que
$\displaystyle\int_0^1 t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt$.
-b- En déduire la nature de la suite (a_n) puis celle de la série $\sum a_n$.
3) -a- Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$?
-b- Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sous forme d'intégrale.
4) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
5) Exprimer sous forme d'intégrale $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1; 1[$.

Indications et réponses

Exercice 26 - CCINP - Majeur

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x} dt$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) -a- Ecrire, pour $t \in]0; 1[$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t}$ sous forme d'une somme de série.
-b- Calculer $f(1)$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
3) -a- Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u} du + \int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{1+u} du$$
-b- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4) Pour $x > 0$, on pose $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
-a- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que, pour $x > 0$, $g'(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x}$.
-b- En déduire une expression de $g(x)$ en fonction de x.

Indications et réponses

1) *On n'oublie pas la continuité.*
En 0 : $\dfrac{\ln t}{t+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln t}{x}$...
2) -a- $\dfrac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln t$.
-b- *Intégration terme à terme à appliquer scrupuleusement.*
Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n^2}$.
3) -a- *Changement de variable :* $t = ux$.
-b- $f'(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
4) -a- $g'(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$.
-b- $g(x) = -\dfrac{(\ln(x))^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 27 - CCINP - Majeur

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
Pour $f \in E$, on considère la fonction $\Delta(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(f)(x) = f(x+1) + f(x)$$
1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2) Soient $f \in E$ et $F = \Delta(f)$.
-a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k F(x+k) = f(x) + (-1)^n f(x+n+1)$$
-b- Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k F(x+k)$ converge et déterminer sa somme.
3) Soit $g \in E$, décroissante. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_k(x) = (-1)^k g(x+k)$.
-a- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. On note f sa somme.
-b- Montrer que $f \in E$ et que $g = \Delta(f)$.
4) Montrer que Δ est injectif.
5) Montrer que Δ n'est pas surjectif (on pourra considérer $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{|x|+1}$.

Indications et réponses

1) *Soigner la forme en ne confondant pas fonction et expression, on montre que pour $f, g \in E$, λ, et tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$[\Delta(\lambda f + g)](x) = [\Delta(f)](x) + [\Delta(g)](x).$$

2) -a- *Découper la somme, et décaler l'indice de la deuxième pour simplifier.*
   -b- *La somme vaut $f(x)$.*
3) -a- *Utiliser le CSSA. La majoration du reste permet de prouver la convergence uniforme.*
   -b- *Pour la continuité de g, on utilise le théorème de transfert.*
   Pour la limite de g en $+\infty$, on utilise le théorème d'échange limite-somme.
4) *Montrer que* $\operatorname{Ker}\Delta = \{0\}$. *Utiliser 2)-a-.*
5) *Montrer que la série $\sum(-1)^k g(x+k)$ ne converge pas et utiliser 2)-a-.*

Exercice 28 -

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0;1];\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$.
Pour $f \in E$, on pose $N(f) = ||f + f'||_\infty$ et $N'(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

1) Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2) Soit $g \in E$. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = g$.
3) Montrer que N et N' sont équivalentes.

Indications et réponses

1) *Vérifier toutes les propriétés d'une norme (séparation ,homogénéité, inégalité triangulaire).*
   Pour la séparation de N, il faut résoudre une équation différentielle.
2) $y : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t\, g(t)\,\mathrm{d}t$.
3) *Une inégalité découle de l'inégalité triangulaire.*
   L'autre utilise 2), en posant $g = f' + f$, et comme $f \in E$ alors $\lambda = 0$.

Exercice 29 -

Déterminer les extrema de $f : (u,v) \in [0;1]^2 \mapsto uv(1-u-v)$.

Indications et réponses *Justifier l'existence d'extrema sur $[0,1]^2$.*
On étudie les extrema de l'intérieur puis on étudie la frontière.
Maximum en $(1/3, 1/3)$ et minimum en $(1,1)$.

Exercice 30 -

Pour tous réels x et y, on pose $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) Quels sont les points critiques de f?
2) Déterminer les extrémums locaux de f.
3) Sont-ils des extrémums globaux?

Indications et réponses

1) $(0,0)$, $(1,1)$.
2) *Pas d'extremum en $(0,0)$, minimum local en $(1,1)$.*
3) *Pas d'extremum global.*

Exercice 31 - CCINP - Majeur

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

1) Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f : (x,y) \mapsto g\left(\frac{y}{x}\right)$.
   Montrer que $f \in \mathcal{E}$.
2) -a- Soient $f \in \mathcal{E}$, $v \in \mathbb{R}$ et $\Phi : t \mapsto f(t, vt)$.
   Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   -b- Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
   Montrer que f est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.
3) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$.
   -a- Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   -b- Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $h(x,y) = F(x^2 + y^2)$.
   Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$
   -c- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

Indications et réponses

Algèbre

Exercice 32 - CCINP - Mineur

Soit $z = \left(\dfrac{1+i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z.
2) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal qui admet z comme racine.

Indications et réponses

Exercice 33 -

Soit $P = X^3 - (2+i)X^2 + 3X + i - 2$. Montrer que P possède une racine réelle puis le factoriser sur $\mathbb{C}$.

Exercice 34 -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
Montrer que $(X-1)^3$ divise P_n.

Exercice 35 - CCINP - Mineur

Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=5 \\ abc=2 \end{cases}$ d'inconnue $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ en considérant le polynôme $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.

Indications et réponses

Exercice 36 -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\Delta_n)_n$.
2) En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 37 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^k = 0$.
Montrer que $I_n - A$ est inversible.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Montrer que $I_n + P(A)$ est inversible.

Exercice 38 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère $\Gamma_k(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ A^k M = A^{k-1}M\}$.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_k(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $\Gamma_k(A)$ pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$.
3) Montrer que, si A est inversible, alors $\Gamma_1(A) = \Gamma_2(A)$.
4) Montrer que, si $\Gamma_1(A) = \Gamma_2(A)$, alors A est inversible.
5) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k(A))$.
   Montrer que la suite $(u_k)_k$ est croissante.
   Montrer que $\min\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ u_k = u_{k+1}\}$ existe.

Exercice 39 - IMT

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
On considère l'application φ qui à $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, associe $\varphi(X,Y) = XU^T + UY^T$.

1) Donner la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que φ est linéaire.
3) Déterminer le rang de φ.

Indications et réponses

Exercice 40 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr(M)A - M$. f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $P = X^2 - (tr(A)-2)X + 1 - tr(A)$ est un polynôme annulateur de f.
2) A quelle condition sur la trace de A, f est-elle diagonalisable?

Exercice 41 -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre commune.

1) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
   On suppose désormais qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(C)$ telle que $AM = MB$.
2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = MB^k$.
3) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B)$.
4) Montrer que M est la matrice nulle.

Exercice 42 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1) Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ telle que $P(A) = 0$. Que peut-on en conclure sur A et son spectre?
2) On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A. Montrer que $A - I_n$ est inversible puis que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 43 - CCINP - Mineur

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

1) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
2) Montrer que $A = 0_n$.

Indications et réponses

Exercice 44 - CCINP - Mineur

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

1) Montrer que B est diagonalisable.
2) Donner le rang de B, ses valeurs propres et ses sous espaces propres.

Indications et réponses

Exercice 45 - IMT

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Indications et réponses

Exercice 46 - CCINP - Mineur

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$.

1) Pour quelles valeurs de a, (A, A^2) est liée?
2) A est-elle diagonalisable?

Indications et réponses

Exercice 47 - CCINP - Mineur

bonnes valeurs propres mais matrice A incertaine

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -12 \\ 9 & -9 & 18 \\ 9 & -15 & 24 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable puis exprimer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Indications et réponses

Exercice 48 - CCINP - Mineur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer AX.

Montrer que 0 et valeur propre.

Montrer que A est diagonalisable.

Indications et réponses

Exercice 49 - CCINP - Mineur

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = D$.
   Montrer que X et D commutent puis que X est diagonale.
2) Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 = D$.
3) Montrer que A et D sont semblables.
4) Comment obtenir les matrices $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 = A$?

Indications et réponses

Exercice 50 - CCINP - Majeur

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g - g \circ f = af - bg$ où a et b sont deux nombres complexes avec $a \neq 0$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\psi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

1) On suppose dans un premier temps que $b = 0$.
   - -a- Montrer que le noyau de f est stable par g.
   - -b- Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\psi_g(f^n) = anf^n$.
   - -c- Montrer par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.
   - -d- Soit h l'endomorphisme de $\operatorname{Ker} f$ induit par g. Montrer que h admet au moins une valeur propre
2) On revient au cas général.
   Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.
   Indication : on pourra poser $u = f \circ g - g \circ f$ et étudier $\psi_g(u)$.

Indications et réponses

Exercice 51 -

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Déterminer une base orthonormée de l'orthogonal de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0 \ \text{ et } \ x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 52 - CCINP - Mineur

1) Montrer que $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est une produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) + 1 & 3 \\ 4 & \operatorname{sh}(x) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) - 1 & 4 \\ -3 & -\operatorname{sh}(x) \end{pmatrix}$.
   Montrer que A et B sont orthogonales.

Indications et réponses

Exercice 53 -

Démontrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Déterminer $m = \displaystyle\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}dt$.

Exercice 54 - IMT

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel. On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ , \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une base de $F^\perp$.
3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
4) Calculer la distance de J à $F^\perp$.

Indications et réponses

Exercice 55 - CCINP - Mineur

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z=0$.
Indications et réponses

Exercice 56 - CCINP - Mineur

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur orthogonal que l'on déterminera.
Indications et réponses

Exercice 57 - IMT

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que, pour tout $x\in E$,

$$||x||^2=\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle^2$$

1) Déterminer $(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}))^\perp$.
   En déduire que $\mathcal{B}$ engendre E.
2) Montrer que, pour tout $(u,v)\in E^2$,
$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^n\langle u,e_i\rangle\langle v,e_i\rangle$$
3) Montrer que $A=(\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice symétrique vérifiant $A^2=A$.
4) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A.
   Conclure que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Indications et réponses

Exercice 58 - IMT

1) Rappeler le théorème spectral pour les matrices.
2) Montrer l'orthogonalité des sous espaces propres pour une matrice symétrique.
3) Soit u un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^3$ (munit du produit scalaire canonique). On suppose
   - $\mathrm{tr}(u)=-3$
   - u possède deux valeurs propres
   - 2 est valeur propre de u et $E_2(u)$ est engendré par les vecteurs $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

   Déterminer le spectre de u et ses sous espaces propres.

Indications et réponses

Exercice 59 - CCINP - Majeur

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire et de la base (orthonormale) canonique.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}8&-11&9\\6&-3&6\\9&-11&8\end{pmatrix}$$

(pas les bons coefficients)

1) Vérifier que $u=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de f.
2) Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\mathbb{R}^{+*})^3$.
   On pose $v_1=\dfrac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_2=\dfrac{1}{\beta}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ et $v_3=\dfrac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1\\-2\\c\end{pmatrix}$.
   Déterminer $(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ pour que $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.
4) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Indications et réponses

Exercice 60 - CCINP - Majeur

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\alpha\in\mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire :

$$(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1P(t)Q(t)dt$$

Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P)=\displaystyle\int_{-1}^1P(t)dt$ et $f_\alpha(P)=P+\alpha X\varphi(P)$.

1) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Dans cette question, on suppose $n=3$.
   -a- Déterminer A_α, matrice de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   -b- Déterminer le spectre de f_α.
   Montrer que f_α est bijectif.
   Montrer que f_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha=0$.
3) On revient à n quelconque supérieur ou égal à 2 et on considère $g_\alpha:P\mapsto P-\alpha\varphi(P)$.
   -a- Déterminer le rang de φ puis montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp=\mathbb{R}_0[X]$.
   -b- Déterminer le rang de g_α.
   g_α est-il bijectif? diagonalisable?
4) Montrer que, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $||g_\alpha(P)||\leqslant(1+2|\alpha|)||P||$.
5) Soit $A=\left\{\dfrac{||g_\alpha(P)||}{||P||}\ ;\ P\in E\setminus\{0\}\right\}$.
   Montrer que A admet une borne supérieure.

Indications et réponses

Probabilités

Exercice 61 -

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, Y la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On définit la variable aléatoire Z par $Z = X$ si $X \neq 0$ et $Z = Y$ sinon.
Déterminer la loi de Z.

Exercice 62 -

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et M la matrice aléatoire $(X_iX_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1) Donner la loi du rang de M ainsi que la loi de sa trace.
2) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur?

Exercice 63 -

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note I et S les valeurs propres de M avec $I \leqslant S$.

1) Donner les expressions de I et S en fonction de X et Y.
2) Quelle est la probabilité que M soit inversible?
3) Calculer la covariance de I et S. Les variables I et S sont-elles indépendantes?

Exercice 64 -

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=k, Y=l) = \frac{\alpha}{2^{k+l}}$$

1) Trouver α. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes?
2) Calculer $G_X(t)$, $E(X)$ et $V(X)$.
3) Calculer $P(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $E(X)$.
4) On pose $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z (on pourra commencer par calculer $P(Z \geqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 65 - CCINP - Mineur

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi binomiale de paramètres n et $p \in]0;1[$.
Déterminer la loi de Y.
Indications et réponses

Exercice 66 - IMT

Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, quand l'événement $N = n$ est réalisé, on effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0;1[$.
On note S le nombre de succès et E le nombre d'échecs.

1) Déterminer la loi de S et celle de E.
2) S et E sont-elles indépendantes?

Indications et réponses

Exercice 67 -

Soient $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $t \in [-1;1]$, $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $P(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 68 - CCINP - Majeur

Soient $p \in]0;1[$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$.

1) Déterminer la fonction génératrice de X.
2) -a- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i)$$

   -b- Déterminer la loi de $X+Y$.
3) -a- Sans utiliser la question précédente, déterminer G_{X+Y}.
   -b- Ecrire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
   En déduire la loi de $X+Y$.
4) Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.
   Déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{i=1} nX_i$.
5) ??

Indications et réponses

Exercice 69 - CCINP - Mineur

On considère une urne comportant n boules numérotées de 1 à n.
On y effectue deux tirages successifs et sans remise d'une boule.
On note X le numéro obtenu au premier tirage et Y le numéro obtenu au second tirage.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Indications et réponses

Exercice 70 - CCINP - Majeur

Soit $\varphi : x \mapsto -x\ln(x)$.
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(X = n)$.

Lorsque la série $\sum \varphi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie. La somme de cette série est alors appelée entropie de X.

1) Etudier les variations de φ. Vérifier qu'on peut prolonger φ par continuité en 0.
2) On suppose dans cette question que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Montrer que X admet une entropie et la déterminer.
3) On revient au cas général et on suppose que X est d'espérance finie.
   -a- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.
   -b- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(p_n) \leqslant \max(np_n, ne^{-n})$.
   -c- Montrer que X admet une entropie.

Indications et réponses

Exercices types oraux Centrale - Mines

Exercice 71 -

Etudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 72 -

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif a_n tel que $e^{a_n} + na_n = 2$.
2) Déterminer la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - na_n)$.

Exercice 73 -

1) Soit $\alpha > 1$. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^{-\alpha}$ est bien définie et en déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
2) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que $\sum u_n$ converge.
Montrer que
$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \sim_{n\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$$
3) Soit $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$U_n = 2\sqrt{n} + a + \frac{b}{\sqrt{n}} - \frac{1}{24n^{3/2}} + o(1/n^{3/2})$$

Exercice 74 -

Soit $f : \mathbb{R}^+ ar \mathbb{R}$, continue en 0, telle qu'il existe $k \in]0; 1[$ et $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(kx)}{x} = l$. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{l}{1-k}$.

Exercice 75 -

Pour $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$.

1) Pour $n \geqslant 2$, justifier l'existence de I_n.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
Dans la suite, on fixe $n \geqslant 2$.
2) Montrer qu'il existe $a_1, \cdots, a_n$ des réels tels que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$\frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{t+k}$$
3) Montrer que $I_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \ln(k)$.
4) Déterminer $a_1, \cdots, a_n$ et en déduire une expression de I_n.

Exercice 76 -

Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs ou nuls.
Pour $x \in [0; 1]$, on pose $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0; 1]$.
2) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

3) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 77 -

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)} x^{2n+1}$.
On note f sa somme.
2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$ sur un intervalle à préciser.
3) Préciser le domaine de définition de f et donner une expression simplifiée de f.

Exercice 78 -

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2) Montrer que F est dérivable et écrire $F'(x)$ sans symbole d'intégration.
3) En déduire $F(x)$ en fonction de x puis la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 79 -

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} dt$.

1) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Soit $x > 0$. Exprimer $S(x)$ comme somme d'une série de fractions rationnelles en x.
3) Montrer que $S(x) \sim_0 \dfrac{\pi}{2x}$.

Exercice 80 -

Etudier les extréma locaux et globaux de $f : (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto y(x^2+\ln(y)^2)$.

Exercice 81 -

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(tx,ty) = t^n f(x,y)$
2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$.

Exercice 82 -

Soit n un entier impair plus grand que 3. On pose $w = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-w^k}{1+w^k}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 83 -

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 a_d \neq 0$. On suppose que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

1) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{i})e^{-ik}d$.
2) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{i})\overline{P(e^{i})}e^{-id}d$ et aboutir à une contradiction.
3) Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 84 -

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(X) = AX - XA$.
Déterminer la dimension du noyau de Φ et celle de son image.

Exercice 85 -

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application $M \mapsto M + tr(M)I_n$.

1) Montrer que f est un isomorphisme.
2) Soient M et N telles que $f(M) = N$. Exprimer M en fonction de N.

Exercice 86 -

Soit $P = X^3 - X + 1$.

1) Montrer que P possède trois racines distinctes z_1, z_2, z_3.
2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1 + z_i$.
Calculer le déterminant de A.

Exercice 87 -

Soient u un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $u = f + g$, $f^2 = 0$ et $g^2 = 0$.

1) Montrer que $\dim \text{Ker}(f) \geqslant (\dim E)/2$.
2) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)$, $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$

Exercice 88 -

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. On suppose qu'il existe des matrices P_1 et P_2 dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $AP_1 = P_2B$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $AQ = QB$.

Exercice 89 -

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que U est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et ses sous espaces propres.
2) Montrer que les vecteurs propres de U sont des vecteurs propres de M pour des valeurs propres à préciser.
3) Calculer χ_M et $\det(M)$.
4) Déterminer M^{-1} lorsque M est inversible.

Exercice 90 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^n P(X^{-1}) \in \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Est-ce que Φ est bijectif?
3) Montrer que Φ est diagonalisable.
4) Donner les sous espaces propres de Φ lorsque $n = 4$.

Exercice 91 -

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A(M) = AM - MA$.
Montrer que le spectre de f_A est $\{\lambda - \mu; (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(f_A)\}$.

Exercice 92 -

Soit E un espace euclidien.

1) Montrer que, pour toute forme linéaire f sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle x, a \rangle$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 A(t)P(t)dt = P(0)$.
3) Montrer que A est de degré n et que $A(0) > 0$.

Exercice 93 -

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts.

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(a_0) + \cdots + P(a_n) = 0\}$. Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
4) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer la distance de Q à H.

Exercice 94 -

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$(X^T X)^2 \leqslant (X^T A X)(X^T A^{-1} X)$$

Exercice 95 -

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(tr(M))^2 \leqslant rg(M) tr(M^2)$.

Exercice 96 -

Soient $n \geqslant 2$ et $A = (\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Trouver une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = U^T U$.
2) Montrer que A est inversible.
3) Montrer que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.
4) Soit α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A.
   Montrer que $\beta \geqslant \dfrac{n+1}{2}$ et $\alpha \leqslant \left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{1/(n-1)}$.
5) Déterminer l'inverse de A.

Exercice 97 -

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1; n]\!]$. On munit $\mathcal{F}(E, E)$ de la loi uniforme. Pour $k \in E$, on note X_k l'indicatrice de l'événement $(k \in f(E))$, et Y la variable aléatoire donnant le cardinal de $f(E)$.

1) Déterminer la loi de X_k.
2) Déterminer l'espérance de Y.
3) Pour k et l distincts, déterminer la covariance de X_k et X_l.

Exercice 98 -

A chaque génération, une cellule se divise en deux cellules avec une probabilité p ou meurt avec une probabilité $1-p$. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de cellules à la génération n. Initialement, il y a une seule cellule : $X_0 = 1$.

1) Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2, puis déterminer $X_n(\Omega)$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} = g_n \circ g_1$.
3) Déterminer $E(X_n)$.

Exercice 99 -

On lance un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus aux différents lancers soit paire?