Ex

1/ $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$

. Soit $x > 0$

* $t \longmapsto \frac{\ln t}{t+x}$ continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $]0,1]$

* En 0 : $\frac{\ln t}{t+x} \underset{0}{\sim} \frac{\ln t}{x}$: intégrable sur $]0,1]$

car $\frac{1}{x}$ constante et $\ln$ intégrable en 0

Donc $\int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$ converge.

Donc $\underline{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2/ -a- Soit $t \in]0,1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n$ car $|-t| < 1$

D'où $\underline{\frac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln t}$

-b- On pose pour $t \in]0,1]$, $f_n(t) = (-1)^n t^n \ln t$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n cpm sur $]0,1]$

Pour $n=0$ $f_0(t) = \ln t$: intégrable sur $]0,1]$

$n \geq 1$: $f_n(t) = (-1)^n t^n \ln t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ (c.c)

donc f_n intégrable en 0.

• D'après 2) -a-, valable aussi pour $t=1$ ($0=0$ donc cv)

on a $\sum f_n$ CVS vers $S : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ sur $]0,1]$

• S est cpm sur $]0,1]$

• Mq $\sum \int_0^1 |f_n|$ cv

$\int_0^1 |f_n| = -\int_0^1 t^n \ln t \, dt$ $\begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = t^n & v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \end{cases}$

$= -\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t\right]_0^1$ $u(t)v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

$+ \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt$ u, v $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$

$= \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$

Par comparaison, $\sum \int_0^1 |f_n|$ cv

Par th d'intégration terme à terme :

$f(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\underline{f(1) = \frac{\pi^2}{12}}$

3/ -a- Soit $x > 0$. On pose $t = ux$ changement affine ($\mathcal{C}^1$ strict ↗, bijectif de $[0,1]$ vers $[0,\frac{1}{x}]$)

$f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(ux)}{ux+x} \cancel{x} du$

$= \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u + \ln x}{1+u} du$

$= \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{1+u} du + \ln x \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+u} du$

On utilise la relation de Chasles et on calcule l'intégrale

$\underline{f(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u} du + \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u} du + \ln x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

3-b- . $x \mapsto \ln x \ln(1+\frac{1}{x})$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations

. $x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u}\,du$ constante donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

. On pose H une primitive de $u \mapsto \frac{\ln u}{1+u}$ continue sur $]0,1]$ donc : $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{1+u}\,du = H(\frac{1}{x}) - H(1)$

Or H $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc par composition $x \mapsto H(1/x) - H(1)$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Finalement : $\underline{f \ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln x \times (-\frac{1}{x^2}) \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$- \frac{1}{x^2} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x})}$$

4) -a- Par opérations $\underline{g \ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$, pour $x>0$,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}\, x \ln(1+x)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln(x+1) - \ln x - \ln(1+x)\right]$$

$$\underline{g'(x) = -\frac{\ln x}{x}}$$

4-b- On forme u'u et intègre :

$$\forall x>0, \ g(x) = -\frac{(\ln(x))^2}{2} + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

Avec $x=1$, $c = g(1) = 2f(1) = -\frac{\pi^2}{6}$

$$\underline{\forall x>0, \ g(x) = -\frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}}$$