Ex 43 $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $A^5+A^4+A^3+A^2+A=O_n$

1/ Posons $P=X^5+X^4+X^3+X^2+X$ $P(A)=O_n$.

$Sp(A) \subset Rac(P)$

$P=X(X^4+X^3+X^2+X+1)$

Soit $\begin{cases} z \in \mathbb{C}, \\ z \neq 1 \end{cases}$ $P(z)=0 \iff z=0$ ou $\dfrac{1-z^5}{1-z}=0$ (si $z\neq 1$)

$\iff z=0$ ou $z^5=1$

$\iff z=0$ ou $z \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$

D'où les racines de P : 0, $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ et $1 \leq k \leq 4$

Comme A symétrique réelle alors d'après le th. spectral A est DZ et admet des vp réelles

Comme les $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ sont complexes non réels pour $1\leq k \leq 4$

Donc $Sp(A) \subset \{0\}$

2/ Comme $Sp(A) \neq \emptyset$: $Sp(A)=\{0\}$.

On reprend la diagonalisabilité de A :

$A=PDP^{-1}$ où $D=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$A=O_n$