Voici des planches complètes, retours des étudiant(e)s de la PC promo 2024-2025. Remercions les de ce travail et de leur contribution à votre formation !

Planche 1 - CCINP - Aya

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Pas de difficultés.*
2) -a- *X et Y ne sont pas nuls car...*
   Quel est le format de U? et quels sont les coefficients?.
   -b- *Calcul. On utilise la transposée d'un produit.*
3) -a- *Réécrire $\varphi(M)=\lambda M$ sous forme $AM=....$ Puis récurrence.*
   -b- *Poser $P=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k X^k$. Alors $P(A)M=...$*
   -c- *Choisir $P=....$ Puis raisonner par l'absurde.*
   -d- *D'après 3)-b-, 0 est valeur propre de $\chi_A(\lambda I_n-A)$.*
   Exprimer les valeurs propres de $\lambda I_n - A$ en fonction de celles de A.
   On utilise ensuite que si μ est vp de B alors $Q(\mu)$ est valeur propre de $Q(B)$.
4) *d'après 2 et 3, on doit trouver $\mathrm{Sp}(\varphi)=\{\alpha+\beta\ /\ (\alpha,\beta)\in(\mathrm{Sp}(A))^2\}$.*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses *L'unique point critique est $(0,0)$.*
C'est un minimum local (utiliser la hessienne). Mais ce n'est pas un minimum global $f(0,0)=0$, trouver un couple (a,b) tel que $f(a,b)<f(0,0)$.

Planche 2 - CCINP - Clément

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Utiliser un critère classique de DZ.*
2) $f_\lambda(2)=(\lambda+2)^n$.
3) *Utiliser les opérations $C_i\leftarrow C_i-C_1$.*
   Puis développer selon C_1.
4) $f_\lambda(1)=(\lambda+1)^n$.
   f_λ est affine et on connaît deux de ses deux valeurs.
5) $\chi_{M_n}=f_\lambda(??)$.
   On résout alors dans $\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n=2$.
   Si n est impair l'unique vp réelle est : $\dfrac{\sqrt[2]{2}-2}{1-\sqrt[n]{2}}$. Si n est pair les vp réelles sont : $\dfrac{\sqrt[2]{2}-2}{1-\sqrt[n]{2}}$ et $-\dfrac{\sqrt[2]{2}+2}{1+\sqrt[n]{2}}$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *Solution générale : $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.*
2) *Analyse-synthèse. On n'oublie pas de prouver que si f est solution du problème alors f est de classe $\mathcal{C}^2$.*
   Les solutions $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+(\lambda-\frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Planche 3 - CCINP - Ahmed

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Calcul.*
2) -a- *Classique pour prouver la CV normale. Majorez pout $t\in\mathbb{R}_+$, $f_k(t)$ par le terme général (indépendant de t) d'une série convergente.*
   -b- *La CV normale implique la CV.... Théorème de transfert de continuité.*
3) -a- *Facile. On n'oublie pas la continuité.*
   -b- *Théorème d'intégration terme à terme à appliquer scrupuleusement.*
4) *Calculer $F_X(t)=\ldots=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}(1-p)}$. Puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}F_X(t)\,\mathrm{d}t$ (intégration directe).*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *On pense à prouver que y est bien deux fois dérivable puis on dérive.*
2) *La solution générale de (E_2) est $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-x}+\mu\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}-x\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.*
   Synthèse : on trouve $\mu=\lambda-1$.

Planche 4 - CCINP - Natacha

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Justifier la dérivabilité et dériver* $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.
2) -a- *Intégration par parties.*

   -b- *Encadrer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ *pour prouver qu'elle est de limite nulle. Puis calculer la limite de* $(n+1)I_n$.
3) -a- *Rédiger correctement la linéarité. Il faut prouver* $\Phi(\lambda f+g) = \lambda\Phi(f)+\Phi(g)$. *Pour cela on prouver pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

   $$[\Phi(\lambda f+g)](x) = \lambda[\Phi(f)](x)+[\Phi(g)](x).$$

   Penser à prouver que $\Phi : E \to E$.

   -b- $\operatorname{Ker}\Phi = \{x \to 0\}$ *(il faut dériver, mais pas que...)*
   Pour $\operatorname{Im}\Phi$, *par double inclusion.*
4) *La solution générale de l'équation différentielle :* $x \mapsto \alpha(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\lambda}}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Déduire alors $\operatorname{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}^*$ *(traiter le cas* $\lambda = 0$ *à part).*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) $a = \mathrm{i}$.
2) *Méthode classique de première année, se ramener à* $Z^n = 1$. *Les solutions sont :* $\tan\dfrac{(4k+1)\pi}{4n}$ *où* $k \in [\![0, n-1]\!]$. *A rédiger correctement*

Planche 5 - CCINP - Eloi

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Règle de d'Alembert.*
2) $P(X = n) = (1-\alpha)^n\alpha$.
3) *Sachant* $(X = n)$, *la loi conditionnelle de* Y *est la loi binomiale de paramètres* n, β.
4) *Partir de* $(1-x)S_{r+1}(x)$, *rassembler les deux sommes en une et utiliser la formule du triangle de Pascal. Bien gérer les termes rentrés/sortis de la somme.*
   Pour $S_r(x)$, *itérer la relation trouvée :* $S_r(x) = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.
5) *Utiliser la formule des probabilités totales avec le SCE* $(Y = n)_{n\in[\![r,+\infty[\![}$ *: on trouve* $a = \dfrac{\alpha\beta^r}{(1-\beta)^r}$ *et*
   $b = (1-\alpha)(1-\beta)$.
   $P(Y = r) = \dfrac{\alpha\beta^r(1-\alpha)^r}{(1-(1-\alpha)(1-\beta))^r}$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) $\operatorname{rg}(M) = 1$ *car...*
2) *Argument très très rapide pour la diagonalisabilité.*
   Valeurs propres : 0 *de multiplicité* 2, 1 *de multiplicité* 1 *(le plus rapide : utiliser la DZ puis la trace).*
3) $M^2 = M$ *(qui peut-être calculé en faisant le produit matriciel ou en repérant* $M = UU^\top$ *où* $U = (a\,b\,c)^\top$*).*
   Puis $\operatorname{Im} M \perp \operatorname{Ker} M$ *en utilisant des familles génératrices de* $\operatorname{Im} M$ *et* $\operatorname{Ker} M$.

Planche 6 - CCINP - Oscar

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Avec* $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ *et les DL de* $\cos$ *et* $\sin$ *on obtient* $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.
2) -a- *Classique application du TBM ! Bien vérifier TOUTES les hypothèses.*

   -b- *A l'aide d'un encadrement de* x_n.
3) -a- *Que vaut* $\tan y_n$ *? A quel intervalle appartient* y_n *?.*

   -b- $\tan u \underset{0}{\sim}$ .....
4) -a- $\tan(u-\pi/2) = \ldots$*?.* $\tan(a+b) = \ldots$*?.*

   -b- *Utiliser ce qui précède.*

   -c- $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *Avec le polynôme caractéristique* $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ *où* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   A est DZ car...(plusieurs façons de le justifier).
   $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
2) *Soit* λ *valeur propre de* A *et* X *vecteur propre associé.*
   Montrer que BX *est vecteur propre de* A.
   Quelle est la dimension de $E_\lambda(A)$*? Déduire que* X *est vecteur propre de* B.
3) X_1, X_2, X_3 *sont des vecteurs propres de* A.
   Que vaut alors BP *à l'aide de 2)? Déduire que*
   $B = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}P^{-1}$.

Planche 7 - CCINP - Aymery

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Utiliser la définition de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ rappelé dans l'énoncé.*
2) -a- *Avec la définition.*
   -b- *C'est du cours, par double implication ! L'une des implication utilise le théorème spectral.*
3) -a- *On utilise :*
$$X^\top CX = \sum_{i,j} c_{ij}x_ix_j \qquad \langle M, N\rangle = \sum_{m_{ij}n_{ij}}.$$
   -b- *Utiliser les propriétés de la trace et de la transposition sans revenir aux coefficients.*
4) -a- *Classique : existence de racine carrée en diagonalisant.*
   -b- $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses
Convergence : montrer la convergence absolue en comparant à l'aide d'un équivalent.
Linéaire $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))$.
Somme téléscopique : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{4}(3x - \sin(3x))$.

Planche 8 - CCINP - Aristide

Exercice préparé

Indications et réponses *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ *et si* I_n *existe on pose* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_nx^n$.

1) *Penser à justifier l'existence de* I_n. *IPP pour* I_1.
2) -a- (I_n) *est décroissante.*
   -b- *Pas de difficulté.*
3) -a- *Utiliser 2)-a- et 2)-b-.*
   -b- *Déterminer alors un équivalent de* I_n. *L'utiliser pour montrer que le rayon vaut* 1.
4) $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$. *Utiliser 3)-b- et séparément les cas* -1 *et* 1.
5) *Il faut échanger les symboles* $\sum$ *et* $\int_1^{\mathrm{e}}$.
   Cas $|x| < 1$ *: théorème d'intégration terme à terme ou à l'aide de la CVU (via CVN) car on intégre sur un segment.*
   Cas $x = -1$ *: théorème de convergence dominée appliquée à la suite des sommes partielles* $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ln^k(t)$.
   On obtient : $g(x,t) = \dfrac{t}{1 - x\ln t}$.

Exercice non préparé

Indications et réponses

1) *Les valeurs propres :* b^2, ac, $-ac$.
2) *Discuter.*
3) *M DZ dans les cas :* $b = c = 0$; $b \neq 0$, $c = 0$; $c \neq 0$, $b = 0$.

Planche 9 - CCINP - Louis

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) $\ln(1+x) = x + \mathrm{o}(x)$.
2) $\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{u_n}{n})}$ *(on peut car dans le* $\ln$ *c'est un réel).*
3) -a- *Développer à l'aide de la formule du binôme et regrouper dans une seule somme.*
   -b- *On utiliser l'inégalité triangulaire pour la première inégalité.*
   Ajouter retrancher $P_n(z)$ *pour la deuxième inégalité.*
   Quelle est la limite de $P_n(z)$ *quand* $n \to +\infty$.
4) *Inégalité triangulaire et utiliser le cas réel de 2).*
5) *Forcer la factorisation par* $\left(1 + \frac{l}{n}\right)^n$, $w_n = \dfrac{u_n - l}{1 + \frac{l}{n}}$.
   Utiliser alors 3) et 4).

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses *Double inclusion : une facile. L'autre utiliser le théorème spectral appliqué à un endomorphisme. Poser* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de vecteurs propres et décomposer* x *dans cette base pour exprimer simplement* $\langle x, u(x)\rangle$.

Planche 10 - CCINP - Cindy

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Inégalité de convexité ou étude de fonction.*
2) -a- n_0 *entier supérieur à* x^2.
   -b- *La limite de* $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ *est calculée en écrivant sous forme exponentielle.*
   -c- *Utiliser 1). Distinguer* $x \leqslant \sqrt{n}$ *et* $x \geqslant \sqrt{n}$.
3) -a- *Continuité sur le segment* $[0, \sqrt{n}]$.
   -b- *Application classique du th de convergence dominée.*
4) *Classique IPP sur les intégrales de Wallis.*
   Poser $a_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n$.
5) *On trouve* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

NB *: on divise* $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ *par* I_n.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) $|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$.
2) $\theta \in]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}] \cup [\dfrac{2\pi}{3}, \pi]$.

Planche 11 - CCINP - Gabriel

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *IPP sur un segment.*
2) -a- *On n'oublie pas la continuité. Et on prouve l'intégrabilité en $+\infty$.*
   -b- *Faire tendre $A \to +\infty$ dans le cas $x > 0$.*
3) -a- *Utiliser l'expression de $g(x)$ de 2)-b-. Puis théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètre.*
   -b- *$g''(x)$ calculé à l'aide de 3)-a-, puis deux IPP sur les intégrales généralisées à rédiger correctement.*
4) *On utilise l'indication et 2)-b-, pour écrire $g(x)$ sous la forme d'une intégrale. Puis théorème de continuité des intégrales à paramètre.*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. *Posons*

$$(S)\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+ac+bc=5 \\ abc=2 \end{cases}.$$

1) $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.
2) $\mathcal{S} = \{(1,1,2), (2,1,1), (1,2,1)\}$.

Planche 12 - CCINP - Solène

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.
2) -a- $f(x) = a + \left(b\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2}\right)x + \mathrm{o}(x)$.
   -b- *Solution générale de l'équation différentielle :* $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(a\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.
   Avec la condition initiale : $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$.
3) -a- *Décrire l'événement E_λ à l'aide des événements $(X = 3k)$.*
   $g(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{3n}}{(3n)!}$.
   -b- *Montrer que $g(\lambda)$ est solution du problème de Cauchy de 2)-b-.*
   $P(E_\lambda) = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\lambda}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda) + \dfrac{1}{3}$.
4) -a- $P(E_\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 1$, $P(E_\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.
   -b- $1 - \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}\lambda$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses $\operatorname{rg}\varphi = 1$ *car...*, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = n-1$ *car...*
$\ker\varphi$ *admet un supplémentaire de dimension...*

NB *: montrer que nécessaire $x_0 \notin H$. Montrer alors par analyse-synthèse : $H \oplus \operatorname{Vect}(x_0) = E$.*

Planche 13 - CCINP - Vincent

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) $\chi_A(X) = (X-1)^2$. *A non DZ. A TZ (critères classiques de diagonalisabilité).*
2) -a- *Calculs.*
   -b- *Quelle est la diagonale de $(P^{-1}AP)^k$?*
3) -a- $g(t) = -2\ln(1-t)$.
   -b- *Distinguer $t = 0$, $t \neq 0$. Factoriser par t dans $\det(I_n - tA)$ et utiliser la polynôme caractéristique de A.*
4) -a- *Trigonaliser M,* $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}P^{-1}$.
   $M^k = ...$
   -b- *Factoriser par t dans $\det(I_n - tM)$ et écrire ce déterminant en fonction du polynôme caractéristique.*
5) *Déterminer d'abord le rayon de convergence de $\sum \dfrac{\lambda_i^k r^k}{k}$. Déduire le résultat par opérations.*
   Dans le cas où $m = 0$, $R = +\infty$.
6) *Calcul en utilisant 4)-a- et le DSE de* $\ln(1-u)$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *On n'oublie pas la continuité par morceaux.*
   En 0, un équivalent simple. En $+\infty$, on majore.
2) *La limite est nulle.*
   On applique le théorème de convergence dominée.
   Pour la domination, la fonction qui domine doit être intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui amènera sûrement à trouver une fonction définie par cas. Par exemple
   $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ \dfrac{1}{x^{3/2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

Planche 14 - CCINP - Julien

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

Planche 15 - CCINP - Allan

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1)

x	0		e^{-1}		1
φ'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2) *On utilise les DSE :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

$$H(X) = \frac{-p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)}{p}.$$

3) -a- *La série* $\sum p_n$ *converge, donc....*

-b- *On est amené à distingue* $p_n \geqslant \mathrm{e}^{-n}$ *et* $p_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}$. *Et on utilise la monotonie de* φ *dans le deuxième cas.*

-c- *On étudie la convergence des séries* $\sum np_n$ *et* $\sum n\,\mathrm{e}^{-n}$.

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *M est DZ car...La seule valeur propre de M est...*
2) *S'intéresser à la matrice $MM^\top$.*

Planche 16 - CCINP - Martin

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) *Très très rapide...*
2) -a- *Comme la matrice diagonale est donnée, étudier directement les sous espaces propres, les noyaux non réduits à $\{0\}$ justifient les valeurs propres, sans perdre de temps à déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique.*
   Penser à donner une matrice P orthogonale, pas seulement inversible, $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

   -b- *Cours : caractérisation spectrale d'appartenir à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.*
   On trouve $\alpha < \frac{1}{2}$.

1) *Valeurs propres : 1, $1-\alpha-\beta$. $Q = \begin{pmatrix}1 & \beta\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}$.*
2) *La limite est $Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}Q^{-1}$. Penser à la continuité de l'application linéaire $M \mapsto QMQ^{-1}$.*
3) *Deux valeurs propres distinctes à l'aide du polynôme caractéristique.. Utiliser la trace pour prouver les inégalité*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *$R = 1$*
2) *$f(x) = \dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$ (utiliser la série géométrique et ses dérivées).*

Planche 17 - CCINP - Isaure

Exercice préparé

Indications et réponses

1) *$(1,0) \in \Gamma_\alpha$. Puis calcul.*
2) *Image d'un réciproque d'un fermé par une fonction continue.*
3) *Γ_1 est la réunion des droites d'équation $x+y=1$ et $x+y=-1$.*
   Γ_{-1} est la réunion des droites d'équation $x-y=1$ et $x-y=-1$.
4) -a- *CNS : $|\alpha| < 1$ (pour vérifier "définie-positive").*
   -b- *??*

Exercice non préparé

Indications et réponses

1) *Formule de Taylor avec reste intégral appliqué à la fonction* exp.
2) *$R_n > 0$ par théorème classique.*
   $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement
3) *Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier.*
4) *Par l'absurde puis utiliser 2) et 3) avec une valeur judicieuse de n.*

Planche 18 - CCINP - Daphnée

Exercice préparé - 20min

Indications et réponses

1) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$.
2) *Classique.*
3) *Récurrence. Noter α_n le coefficient du degré n.*
4) -a- *Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_{n,k} \geqslant 0.$$

-b- *Utiliser 4)-a-, et le fait que $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

Exercice non préparé - 10min

Indications et réponses

1) *Effectuer un développement aymptotique de $\ln(1+a_n)$, pour prouver que $\ln(1+a_n) = a_n + b_n$ où $b_n \sim -\frac{1}{2n}$.*
2) *Poser $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$. $\ln(P_n)$ est la somme partielle de la série de la question 1).*

Planche 19 - IMT - Clément

Exercice 1

Indications et réponses *Poser $f(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}$.*

1) *Fixer $x > 0$. Ne pas oublier la continuité de $t \mapsto f(x,t)$.*
En 0 : $f(x,t) \sim \frac{1}{x^2}\ln t$. En $+\infty$, $f(x,t) \sim \frac{\ln t}{t^2}$.
2) *Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre. Domination sur $[a,b]$...*

Exercice 2

Indications et réponses

1) $N \sim \mathcal{B}(n,p)$.
2) *Calculer $P(C)$ en tilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(N=k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.*
$P_{N=k}(C)$ se calcule plus facile via le complémentaire.
$P(C) = 1 - \left(1 - \dfrac{2p}{3}\right)^n$.

Planche 20 - IMT - Clélia

Exercice 1

Indications et réponses

1) *Prendre $x+y$ au lieu de x dans l'hypothèse.*
2) *Poser les matrices A, X, Y de u, x, y dans la base $\mathcal{B}$.*
Ecrire l'égalité de 1) à l'aide des matrices.
Prouver proprement que si $X^\top MY = 0$ pour tout X, Y alors M est nul.
3) $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Im}(u)$. *Puis l'égalité des dimensions... qui permet de conclure.*

Exercice 2

Indications et réponses *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose (E_n) : $x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.*

1) *Application classique du théorème de la bijection monotone.*
2) *Minorer $x_n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.*
Calculer d'abord la limite de $\dfrac{x_n}{n}$.
3) $x_n - 1 = x_n - x_n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. *Utiliser l'équivalent usuel de $(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1$ en 0.*

Planche 21 - IMT - Daphnée

Exercice 1

Indications et réponses *Poser $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n$.

Puis, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0$, $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1$.

Solution avec conditions initiales : $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$, $y(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 2

Indications et réponses

1) *Calculer $f_j \circ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$ de deux manières.*
2) *Pour prouver $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$: double inclusion.*
Une évidente, l'autre utilise la première hypothèse.
Pour la somme directe, prouver l'unicité de la décomposition de 0_E comme somme de vecteurs de $\mathrm{Im}\, f_i$.
On utilise en cours de route la deuxième hypothèse.

Planche 22 - IMT - Hugo

Exercice 1

Indications et réponses *Par analyse-synthèse.*
L'analyse fournit l'unicité de la décomposition.
Il peut être efficace d'utiliser que $a \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ signifie $u(a) = -a$, $b \in \mathrm{Ker}(u - 6\,\mathrm{Id}_E)$ signifie $u(b) = 6b$; puis $u^2 - 5u - 6\,\mathrm{Id}_E = (u+\mathrm{Id}_E)(u-6\,\mathrm{Id}_E) = (u-6\,\mathrm{Id}_E)(u+\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2

Indications et réponses

1) *On n'oublie pas la continuité de f_n. En $+\infty$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.*
2) *Théorème de convergence dominée.* (f_n) *converge simplement vers* $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } |t|<1 \\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$.

Planche 23 - IMT - Martin

Exercice 1

Indications et réponses $R = 1$.
Utiliser après les avoir démontrées les deux DSE :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

On distingue ensuite : $x > 0$ en posant $x = t^2$; $x < 0$ en posant $x = -t^2$; $x = 0$.
Finalement :

$$f(0) = 1, \qquad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0.$$

Exercice 2

Indications et réponses

1) *Quelle est la dimension de* $\operatorname{Ker} M$ *? Quelle valeur propre obtient-on, sa multiplicité.*
   Puis par double implication, en utilisant l'expression de la trace en fonction des valeurs propres.
2) -a- *Un grand classique. La matrice est de rang 1, que dire des colonnes?*
   -b- *Utiliser 2)-a-.*
3) $P = X^2 - (\operatorname{Tr}(M)+2)X + (\operatorname{Tr}(M)+1)I_n$ *est annulateur de C.*
   C est inversible ssi $\operatorname{Tr}(M) \neq -1$ *dans ce cas l'inverse est* $I_n - \dfrac{1}{\operatorname{Tr}(M)+1}M$.

Planche 24 - IMT - Vincent

Exercice 1

Indications et réponses

1) $\operatorname{rg}(N) = n-1$; *base de* $\operatorname{Im}(N)$: $\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}\right)$;

   base de $\operatorname{Ker}(N)$: $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}$.
2) $\chi_N(X) = X(X-1)(X-2)$. *Spectre de N:* $\{0,1,2\}$.
   N est DZ : argument très rapide.

Exercice 2

Indications et réponses

1) $P(C_n) = (1-a)^n(1-b)^n$.
2) $P(G_A) = \dfrac{a}{a+b-ab}$.
3) $P(G_B) = \dfrac{(1-a)b}{a+b-ab}$.
4) $P(N) = 0$.
5) $P(T = 2n+1) = P(C_n)$, $P(T = 2n) = (1-a)^n(1-b)^{n-1}a$.
   On somme par paquets des indices pairs et impairs, on utilise $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.
   $E(T) = \dfrac{2a+2b-a^2-3ab-a^2b}{(a+b-ab)^2}$.

Planche 25 - IMT - Ahmed

Exercice 1

Indications et réponses

1) *On prouve l'intégrabilité, sans oublier la continuité.*
   Pour le calcul une IPP bien rédigée : $I_n = \dfrac{1}{n^2}$.
2) *Théorème d'intégration terme à terme.*

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{où } f_n(x) = x\,e^{-nx}.$$

3) *Poser $t = e^{-x}$ et se ramener à 2).*

Exercice 2

Indications et réponses

1) $A(t)$ *DZ : argument très rapide.*
   $D(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$, $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
2) $A(t)^n = \begin{pmatrix}\operatorname{ch}(nt) & \operatorname{sh}(nt)\\ \operatorname{sh}(nt) & \operatorname{ch}(nt)\end{pmatrix}$

Planche 26 - IMT - Oscar

Exercice 1

Indications et réponses

1) *Changement de variable :* $x = \pi - t$.
2) *On pose* J*, l'intégrale. D'après 1) :* $J = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\cos^{2n}(x)+\sin^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$*. Exploitez la* π*-périodicité et la pariét pour écrire* J *à l'aide de* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}$.
Puis changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$.
$J = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Indications et réponses $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k + A^{-k} 2\cos(\frac{k\pi}{3})$.
Méthode 1 *: on calcule* $(A + A^{-1})^2$*,* $(A + A^{-1})^3$*...pour conjecture une formule pour* $A^k + A^{-k} = a_k I_n$.
Ce que l'on prouve par récurrence double, et on montre dans l'hérédité que $a_{k+2} = a_{k+1} - a_k$.
Méthode 2 *:* $A + A^{-1} = I_n$ *donne* $X^2 - X + 1$ *est annulateur de* A *et* A^{-1}.
On effectue la division euclidienne de X^k *par* $X^2 - X + 1$ *pour exprimer* A^k *en fonction de* A *et* I_2*,* A^{-k} *en fonction de* A *et* I_2.

Planche 27 - IMT - Solène

Exercice 1

Indications et réponses

1) *Théorème de classe* $\mathcal{C}^2$ *des intégrales à paramètre (la domination est très simple).*
2) *On calcule* $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *avec le théorème d'intégrale à paramètre.*
On effectue une IPP sur $f'(x)$.

Exercice 2

Indications et réponses

1) *Élever au carré l'égalité de l'hypothèse. Développer* $\|a - b\|^2 = (a - b|a - b) = \ldots.$
Prouver $\|f(x)\| = \|x\|$ *qui sera utile.*
2) *Calculer* $\|f(x + y) - f(x) - f(y)\|^2$ *et* $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2$.
C'est une isométrie.
3) *Question inconnue.*

Planche 28 - IMT - Zoé

Exercice 1

Indications et réponses

1) *Très très rapide.*
2) -a- $M^2 = nM$.
-b- $A^2 + (2 - n)A = (n - 1)I$*. A inversible avec* $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I$.
3) $\mathrm{Sp}(A) = \{n - 1, -1\}$ *(utiliser* $\mathrm{rg}(A + I)$ *et la trace).*
$\mathrm{Sp}(N) = \{n, 0\}$ *(exprier* χ_N*) en fonction de* χ_A*).*

Exercice 2

Indications et réponses

1) $\sum f_n$ *converge simplement vers* $F : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} & \text{si } t \in [-1, 1[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$*. La convergence n'est pas uniforme car....(que dire de* F*?)*
2) *Théorème d'intégration terme à terme : à l'aide d'une IPP puis d'une majoration montrer que*
$\displaystyle\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$.