**Voici des planches complètes, retours des étudiant(e)s de la PC promo 2024-2025. Remercions les de ce travail et de leur contribution à votre formation !**

## Planche 1 - CCINP - Aya

### Exercice préparé - 20min

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = AM + MA.$$

1) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de $A$ et $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de $A^\top$. On pose $U = XY^\top$.
   -a- Montrer que $U$ est non nulle.
   -b- Montrer que $U$ est un vecteur propre de $\varphi$.
3) On considère maintenant un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\varphi(M) = \lambda M$.
   -a- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(\lambda I_n - A)^k$.
   -b- En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(\lambda I_n - A)$.
   -c- Montrer que $\chi_A(\lambda I_n - A)$ n'est pas inversible.
   -d- Montrer alors que $\lambda$ s'écrit comme somme de deux valeurs propres de $A$.
4) Déterminer alors le spectre de $\varphi$.

**Indications et réponses**

*1) Pas de difficultés.*
*2) -a- $X$ et $Y$ ne sont pas nuls car...*
   *Quel est le format de $U$? et quels sont les coefficients?.*
   *-b- Calcul. On utilise la transposée d'un produit.*
*3) -a- Réécrire $\varphi(M) = \lambda M$ sous forme $AM = ....$*
   *Puis récurrence.*
   *-b- Poser $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. Alors $P(A)M = ...$*
   *-c- Choisir $P = ....$ Puis raisonner par l'absurde.*
   *-d- D'après 3)-b-, 0 est valeur propre de $\chi_A(\lambda I_n - A)$.*
   *Exprimer les valeurs propres de $\lambda I_n - A$ en fonction de celles de $A$.*
   *On utilise ensuite que si $\mu$ est vp de $B$ alors $Q(\mu)$ est valeur propre de $Q(B)$.*
*4) d'après 2 et 3, on doit trouver $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\alpha + \beta \ / \ (\alpha, \beta) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\}$.*

### Exercice non préparé - 10min

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$. $f$ admet-elle un minimum local? $f$ admet-elle un minimum global.

**Indications et réponses** *L'unique point critique est $(0, 0)$.*
*C'est un minimum local (utiliser la hessienne). Mais ce n'est pas un minimum global $f(0, 0) = 0$, trouver un couple $(a, b)$ tel que $f(a, b) < f(0, 0)$.*

## Planche 2 - CCINP - Clément

### Exercice préparé - 20min

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\lambda$ un réel. On pose $M_n$ et $C$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \det(\lambda I_n - M_n + xC) \end{array}$.

1) Montrer que $M_2$ est diagonalisable.
2) Calculer $f_\lambda(2)$.
3) A l'aide d'opérations sur les colonnes, exprimer $f_\lambda$ avec des $x$ uniquement dans la première colonne du déterminant. Puis montrer que $f_\lambda$ est affine.
4) Calculer $f_\lambda(1)$, puis trouver l'expression de $f_\lambda$.
5) Trouver l'expression de $\chi_{M_n}$ puis en déduire les valeurs propres réelles de $M_n$.

**Indications et réponses**

*1) Utiliser un critère classique de DZ.*
*2) $f_\lambda(2) = (\lambda + 2)^n$.*
*3) Utiliser les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$.*
   *Puis développer selon $C_1$.*
*4) $f_\lambda(1) = (\lambda + 1)^n$.*
   *$f_\lambda$ est affine et on connaît deux de ses deux valeurs.*
*5) $\chi_{M_n} = f_\lambda(??)$.*
   *On résout alors dans $\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{\lambda + 2}{\lambda + 1}\right)^n = 2$.*
   *Si $n$ est impair l'unique vp réelle est : $\dfrac{\sqrt[n]{2} - 2}{1 - \sqrt[n]{2}}$. Si $n$ est pair les vp réelles sont : $\dfrac{\sqrt[n]{2} - 2}{1 - \sqrt[n]{2}}$ et $-\dfrac{\sqrt[n]{2} + 2}{1 + \sqrt[n]{2}}$.*

## Exercice non préparé - 10min

1) Résoudre l'équation $(E)$ : $y'' - y = \mathrm{e}^{-x}$.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Indications et réponses**

*1) Solution générale : $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

*2) Analyse-synthèse. On n'oublie pas de prouver que si $f$ est solution du problème alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Les solutions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + (\lambda - \frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

---

# Planche 3 - CCINP - Ahmed

## Exercice préparé - 20min

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Rappel : $\forall x \in ]-1,1[, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

1) Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.
   Rappeler la loi de $X$. En déduire $E(\dfrac{1}{X}) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p}$.
2) On considère une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset [1, +\infty[$.
   On note $X(\Omega) = \{x_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X = x_k)$.
   On pose $F_X : t \mapsto E(\mathrm{e}^{-tX})$.
   -a- Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : t \mapsto p_k\,\mathrm{e}^{-tx_k}$.
   Montrons que $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   -b- En déduire que $F_X$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et donner le lien entre $F_X$ et $\sum f_k$.
   Montrer que $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3) -a- Montrons que $f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.
   -b- Montrer que $F_X$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t = E(\frac{1}{X})$.
4) On reprend $X$ comme dans la question 1). Retrouver le résultat de la question 1) à l'aide de la question 3).
5) ???

**Indications et réponses**

*1) Calcul.*

*2) -a- Classique pour prouver la CV normale. Majorez pout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_k(t)$ par le terme général (indépendant de $t$) d'une série convergente.*
*-b- La CV normale implique la CV.... Théorème de transfert de continuité.*

*3) -a- Facile. On n'oublie pas la continuité.*
*-b- Théorème d'intégration terme à terme à appliquer scrupuleusement.*

*4) Calculer $F_X(t) = \ldots = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}(1-p)}$. Puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ (intégration directe).*

## Exercice non préparé - 10min

On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x})y'(x) + (2\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x})y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - x \quad (E_1).$$

1) Montrer que si $y$ vérifie $(E_1)$ alors $y$ vérifie l'équation :
$$(E_2) \quad y'' + 3y' + 2y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$
2) En déduire la résolution de $(E_1)$.

**Indications et réponses**

*1) On pense à prouver que $y$ est bien deux fois dérivable puis on dérive.*

*2) La solution générale de $(E_2)$ est $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2} - x\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
*Synthèse : on trouve $\mu = \lambda - 1$.*

---

# Planche 4 - CCINP - Natacha

## Exercice préparé - 20min

On pose $E$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
   -a- Montrer que $(n+1)I_n = a + b\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ où $a$ et $b$ sont à déterminer.
   -b- Montrer que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
3) On pose l'application $\Phi : f \mapsto \widetilde{f}$.
   -a- Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $E$.
   -b- Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.
   Montrer que : $\operatorname{Im}\Phi = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \,/\, g(0) = 0\}$.
4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Résoudre l'équation différentielle $\lambda y'(x) = \dfrac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire les valeurs propres de $\Phi$.

**Indications et réponses**

*1) Justifier la dérivabilité et dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.*

2) -a- *Intégration par parties.*

-b- *Encadrer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ *pour prouver qu'elle est de limite nulle. Puis calculer la limite de* $(n+1)I_n$.

3) -a- *Rédiger correctement la linéarité. Il faut prouver* $\Phi(\lambda f+g)=\lambda\Phi(f)+\Phi(g)$. *Pour cela on prouver pour tout* $x\in\mathbb{R}$,

$$[\Phi(\lambda f+g)](x)=\lambda[\Phi(f)](x)+[\Phi(g)](x).$$

*Penser à prouver que* $\Phi : E\to E$.

-b- $\operatorname{Ker}\Phi=\{x\to 0\}$ *(il faut dériver, mais pas que...)*
*Pour* $\operatorname{Im}\Phi$, *par double inclusion.*

4) *La solution générale de l'équation différentielle :* $x\mapsto \alpha(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\lambda}}$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}$.
*Déduire alors* $\operatorname{Sp}(\varphi)=\mathbb{R}^*$ *(traiter le cas* $\lambda=0$ *à part).*

## Exercice non préparé - 10min

1) Trouver le module et un argument de $a=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation : $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^n=a$ où $z\in\mathbb{C}$.

### Indications et réponses

1) $a=\mathrm{i}$.

2) *Méthode classique de première année, se ramener à* $Z^n=1$. *Les solutions sont :* $\tan\dfrac{(4k+1)\pi}{4n}$ *où* $k\in[\![0,n-1]\!]$. *A rédiger correctement*

---

# Planche 5 - CCINP - Eloi

## Exercice préparé - 20min

Soient deux réels $\alpha$ et $\beta$ de $]0,1[$.

Un joueur passe une série de tests identiques.
A chaque test qu'il doit passer, il doit se qualifier. Tant qu'il se qualifie, il passe le test. Le jeu s'arrête lorsqu'il ne se qualifie pas. La probabilité de ne pas se qualifier est $\alpha\in]0,1[$.
Lorque qu'il passe chaque test, il a une probabilité $\beta$ de le réussir (il doit ensuite se qualifier pour passer le test suivant).

On note $X$ le nombre de tests passés; $Y$ le nombre de tests réussis.

1) Soit $r\in\mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^n$ est 1.

On note $S_r(x)=\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n$.

2) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on définit l'événement $E_k$ : "le joueur s'est qualifié pour le test $k$".
Montrer que $(X=n)=E_1\cap\cdots\cap E_n\cap\overline{E_{n+1}}$.
Déterminer alors la loi de $X$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $(X=n)$.

4) Montrer : $\forall r\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ (1-x)S_{r+1}(x)=xS_r(x)$.
Exprimer alors $S_r(x)$.

5) Soit $r\in\mathbb{N}$. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que

$$P(Y=r)=a\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}b^n.$$

Déterminer alors la loi de $Y$.

### Indications et réponses

1) *Règle de d'Alembert.*

2) $P(X=n)=(1-\alpha)^n\alpha$.

3) *Sachant* $(X=n)$, *la loi conditionnelle de* $Y$ *est la loi binomiale de paramètres* $n$, $\beta$.

4) *Partir de* $(1-x)S_{r+1}(x)$, *rassembler les deux sommes en une et utiliser la formule du triangle de Pascal. Bien gérer les termes rentrés/sortis de la somme.*
*Pour* $S_r(x)$, *itérer la relation trouvée :* $S_r(x)=\dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

5) *Utiliser la formule des probabilités totales avec le SCE* $(Y=n)_{n\in[\![r,+\infty[\![}$ *: on trouve* $a=\dfrac{\alpha\beta^r}{(1-\beta)^r}$ *et*
$b=(1-\alpha)(1-\beta)$.
$P(Y=r)=\dfrac{\alpha\beta^r(1-\alpha)^r}{(1-(1-\alpha)(1-\beta))^r}$.

## Exercice non préparé - 10min

Soient $a,b,c$ des réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. On pose $M=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$

1) Calculer le rang de $M$.

2) $M$ est-elle diagonalisable? Détermminer ses valeurs propres.

3) *Question possible* : montrer que $M$ est la matrice d'un projecteur orthogonal.

### Indications et réponses

1) $\operatorname{rg}(M)=1$ *car...*

2) *Argument très très rapide pour la diagonalisabilité.*
*Valeurs propres :* 0 *de multiplicité* 2, 1 *de multiplicité* 1 *(le plus rapide : utiliser la DZ puis la trace).*

3) $M^2=M$ *(qui peut-être calculé en faisant le produit matriciel ou en repérant* $M=UU^\top$ *où* $U=(a\,b\,c)^\top$*).*
*Puis* $\operatorname{Im}M\perp\operatorname{Ker}M$ *en utilisant des familles génératrices de* $\operatorname{Im}M$ *et* $\operatorname{Ker}M$.

---

## Planche 6 - CCINP - Oscar

### Exercice préparé - 20min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1) Déterminer le développement limité à l'ordre de 3 de tan au voisinage de 0.
2) -a- On pose $f(x) = \tan(x) - x$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.
   -b- Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
   -a- Montrer que $y_n = \operatorname{Arctan}(x_n)$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
   -b- Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} y_n - \dfrac{\pi}{2}$.
   En déduire que : $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4) -a- Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) + x_n}$.
   -b- En déduire que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\pi n^2}$.
   -c- Déterminer alors un développement asymptotique de $x_n$ à la précision $\dfrac{1}{n^2}$.

#### Indications et réponses

*1) Avec* $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ *et les DL de* cos *et* sin *on obtient* $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.

*2) -a- Classique application du TBM ! Bien vérifier TOUTES les hypothèses.*
*-b- A l'aide d'un encadrement de* $x_n$.

*3) -a- Que vaut* $\tan y_n$ *? A quel intervalle appartient* $y_n$ *?.*
-b- $\tan u \underset{0}{\sim}$ .....

*4) -a-* $\tan(u - \pi/2) = ...?$. $\tan(a+b) = ...?$.
*-b- Utiliser ce qui précède.*
-c- $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

### Exercice non préparé - 10min

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe $D$ diagonale et $P$ inversible tel que $D = P^{-1}AP$. On déterminera $D$ mais pas $P$.
2) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA$.
   Montrer que si $X$ est un vecteur propre de $A$ alors $X$ est vecteur propre de $B$.
3) *Dernière question possible* Déterminer alors $B$ à l'aide de $P$. On pourra introduire $X_1, X_2, X_3$ les colonnes de $P$ et écrire $P = (X_1|X_2|X_3)$.

#### Indications et réponses

*1) Avec le polynôme caractéristique* $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ *où* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
*A est DZ car...(plusieurs façons de le justifier).*
$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

*2) Soit* $\lambda$ *valeur propre de* $A$ *et* $X$ *vecteur propre associé.*
*Montrer que* $BX$ *est vecteur propre de* $A$.
*Quelle est la dimension de* $E_\lambda(A)$ *? Déduire que* $X$ *est vecteur propre de* $B$.

*3)* $X_1, X_2, X_3$ *sont des vecteurs propres de* $A$.
*Que vaut alors* $BP$ *à l'aide de 2)? Déduire que*
$B = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$.

---

## Planche 7 - CCINP - Aymery

### Exercice préparé - 20min

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle la définition

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top MX \geqslant 0 \right\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable pour l'addition et la multiplication par un réel positif.
2) -a- Soit $U \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que $UU^\top \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   -b- Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$.
3) On définit le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$.
   Soient $A, B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   -a- On pose la matrice $C = A \otimes B = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par
   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$
   On pose $X = (x_1 \cdots x_n)^\top$ et $D = \mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)$.
   Montrer que $X^\top CX = \langle DAD, B \rangle$.
   -b- Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
   $$\langle MA, B \rangle = \langle A, MB \rangle \qquad \langle AM, B \rangle = \langle A, BM \rangle.$$
4) On suppose de plus que $A$ et $B$ appartiennent à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   -a- Montrer qu'il existe deux matrices $A', B'$ de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = A'^2$ et $B = B'^2$.
   -b- Que peut-on dire de $C$?

#### Indications et réponses

*1) Utiliser la définition de* $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ *rappelé dans l'énoncé.*

*2) -a- Avec la définition.*
*-b- C'est du cours, par double implication ! L'une des implication utilise le théorème spectral.*

*3)* -a- *On utilise :*

$$X^\top CX = \sum_{i,j} c_{ij}x_ix_j \qquad \langle M, N\rangle = \sum_{m_{ij}n_{ij}} .$$

-b- *Utiliser les propriétés de la trace et de la transposition sans revenir aux coefficients.*

*4)* -a- *Classique : existence de racine carrée en diagonalisant.*

-b- $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

## Exercice non préparé - 10min

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = 3^n \sin^3\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.
Montrer la convergence puis calculer la somme de $\sum u_n(x)$.

**Indications et réponses**
*Convergence : montrer la convergence absolue en comparant à l'aide d'un équivalent.*
*Linéaire* $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))$.
*Somme téléscopique :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{4}(3x - \sin(3x))$.

---

## Planche 8 - CCINP - Aristide

### Exercice préparé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ et si $I_n$ existe on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

1) Justifier l'existence de $I_n$. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2) -a- Étudier la monotonie de $(I_n)$.
   -b- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^2$.
3) -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$
   -b- En déduire le rayon de convergence de la série $\sum I_n x^n$.
4) Déterminer l'ensemble de définition de $f$. On le note $\mathcal{D}_f$.
5) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $g$ est une fonction à déterminer.

**Indications et réponses** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ et si $I_n$ existe on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.*

*1) Penser à justifier l'existence de $I_n$. IPP pour $I_1$.*

*2)* -a- *$(I_n)$ est décroissante.*

-b- *Pas de difficulté.*

*3)* -a- *Utiliser 2)-a- et 2)-b-.*

-b- *Déterminer alors un équivalent de $I_n$. L'utiliser pour montrer que le rayon vaut 1.*

*4) $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$. Utiliser 3)-b- et séparément les cas $-1$ et 1.*

*5) Il faut échanger les symboles $\sum$ et $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}$.*
*Cas $|x| < 1$ : théorème d'intégration terme à terme ou à l'aide de la CVU (via CVN) car on intégre sur un segment.*
*Cas $x = -1$ : théorème de convergence dominée appliquée à la suite des sommes partielles $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \ln^k(t)$.*
*On obtient : $g(x,t) = \dfrac{t}{1 - x\ln t}$.*

### Exercice non préparé

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de $M$.
2) Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes en fonction de $a, b, c$.
3) ??*Question possible* On pose $a = 0$. Déterminer des conditions sur $b$ et $c$ pour que $M$ soit diagonalisable.

**Indications et réponses**

*1) Les valeurs propres : $b^2$, $ac$, $-ac$.*

*2) Discuter.*

*3) M DZ dans les cas : $b = c = 0$ ; $b \neq 0$, $c = 0$; $c \neq 0$, $b = 0$.*

---

## Planche 9 - CCINP - Louis

### Exercice préparé - 20min

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. On note $l \in \mathbb{C}$ sa limite.
L'objectif est de prouver le résultat suivant :

$$(L) \quad \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^l .$$

1) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$.
2) Dans cette question on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Montrer le résultat $(L)$.
3) On revient au cas d'une suite complexe. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = z \in \mathbb{C}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les deux polynômes $P_n$ et $Q_n$ définies par
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \qquad Q_n(z) = P_n(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$
   -a- Montrer que $Q_n$ est un polynôme à coefficients réels positifs.

-b- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |Q_n(z)| \leqslant Q_n(|z|).$$

En déduire une majoration de $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right|$ puis le résultat $(L)$.

4) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe de limite nulle.
Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |(1+\alpha)^n - 1| \leqslant (1+|\alpha|)^n - 1.$$

En déduire la propriété $(L)$.

5) On revient au cas général où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$.
En écrivant $u_n = (u_n - l) + l$, déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{l}{n}\right)^n \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n.$$

En déduire le résultat $(L)$.

**Indications et réponses**

*1)* $\ln(1+x) = x + \mathrm{o}(x)$.

*2)* $\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{u_n}{n})}$ *(on peut car dans le* ln *c'est un réel).*

*3) -a- Développer à l'aide de la formule du binôme et regrouper dans une seule somme.*

*-b- On utiliser l'inégalité triangulaire pour la première inégalité.*
*Ajouter retrancher $P_n(z)$ pour la deuxième inégalité.*
*Quelle est la limite de $P_n(z)$ quand $n \to +\infty$.*

*4) Inégalité triangulaire et utiliser le cas réel de 2).*

*5) Forcer la factorisation par $\left(1+\frac{l}{n}\right)^n$, $w_n = \dfrac{u_n - l}{1+\frac{l}{n}}$.*
*Utiliser alors 3) et 4).*

## Exercice non préparé - 10min

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $u$ est autoadjoint.
Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \;/\; \langle x, u(x)\rangle = 0\}.$$

**Indications et réponses** *Double inclusion : une facile. L'autre utiliser le théorème spectral appliqué à un endomorphisme. Poser $(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres et décomposer $x$ dans cette base pour exprimer simplement $\langle x, u(x)\rangle$.*

---

# Planche 10 - CCINP - Cindy

## Exercice préparé - 20min

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

1) Montrer que : $\forall t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.

2) -a- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $x \in [0, \sqrt{n}]$.

-b- En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $h$.

-c- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|h_n(x)| \leqslant h(x)$.

3) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

-a- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge.
À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{n}\sin(t)$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

-b- En déduire que :

$$\sqrt{n} I_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

5) On admet que : $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

**NB** : *il peut être utile de savoir prouver $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$. Pour cela, prouver d'abord que la suite $(I_n)$ est décroissante.*

**Indications et réponses**

*1) Inégalité de convexité ou étude de fonction.*

*2) -a- $n_0$ entier supérieur à $x^2$.*

*-b- La limite de $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$ est calculée en écrivant sous forme exponentielle.*

*-c- Utiliser 1). Distinguer $x \leqslant \sqrt{n}$ et $x \geqslant \sqrt{n}$.*

*3) -a- Continuité sur le segment $[0, \sqrt{n}]$.*

*-b- Application classique du th de convergence dominée.*

*4) Classique IPP sur les intégrales de Wallis.*
*Poser $a_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n$.*

*5) On trouve $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

**NB** *: on divise $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ par $I_n$.*

## Exercice non préparé - 10min

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel $|z| = 1$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$ un argument de $z$.

1) Calculer $|1+z|$.

2) A quelle condition sur $\theta$ telle que $|1+z| \leqslant 1$.

**Indications et réponses**

*1)* $|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$.

*2)* $\theta \in ]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}] \cup [\dfrac{2\pi}{3}, \pi]$.

---

## Planche 11 - CCINP - Gabriel

### Exercice préparé - 20min

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1) Soit $A > 0$ et $x > 0$. Montrer que :

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\cos(A)}{A+x} - \int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

2) -a- Soit $x > 0$. Montrer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   -b- Montrer que $g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3) -a- Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   -b- Pour $x > 0$, exprimer simplement $g''(x) + g(x)$.
4) Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On pourra utiliser : $\displaystyle\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$.

#### Indications et réponses

*1) IPP sur un segment.*
*2) -a- On n'oublie pas la continuité. Et on prouve l'intégrabilité en $+\infty$.*
*-b- Faire tendre $A \to +\infty$ dans le cas $x > 0$.*
*3) -a- Utiliser l'expression de $g(x)$ de 2)-b-. Puis théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètre.*
*-b- $g''(x)$ calculé à l'aide de 3)-a-, puis deux IPP sur les intégrales généralisées à rédiger correctement.*
*4) On utilise l'indication et 2)-b-, pour écrire $g(x)$ sous la forme d'une intégrale. Puis théorème de continuité des intégrales à paramètre.*

### Exercice non préparé - 10min

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Posons $(S)\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+ac+bc=5 \\ abc=2 \end{cases}$.

1) Déterminer $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ où $(a,b,c)$ solution de $(S)$.
2) Résoudre le système.

**Indications et réponses** *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Posons* $(S)\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+ac+bc=5 \\ abc=2 \end{cases}$.

*1) $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.*
*2) $\mathcal{S} = \{(1,1,2),(2,1,1),(1,2,1)\}$.*

---

## Planche 12 - CCINP - Solène

### Exercice préparé - 20min

Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1) Donner l'expression de $P(X=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) -a- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

   -b- Déterminer la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y''+y'+y=\mathrm{e}^x \\ y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \end{cases}$.

3) On pose $E_\lambda$ : "$X$ est divisible par 3".
   -a- On pose $g(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda)$. Écrire $g(\lambda)$ sous forme de somme d'une série entière.
   -b- À l'aide de 2)-b-, montrer que :

$$g(\lambda) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) + \frac{\mathrm{e}^\lambda}{3}.$$

   En déduire $P(E_\lambda)$.
4) -a- Déterminer la limite de $P(E_\lambda)$ en 0 et en $+\infty$.
   -b- Donner un équivalent simple en 0 de $1 - \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda)$.

#### Indications et réponses

*1) $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.*
*2) -a- $f(x) = a + \left(b\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2}\right)x + \mathrm{o}(x)$.*
*-b- Solution générale de l'équation différentielle : $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.*
*Avec la condition initiale : $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$.*
*3) -a- Décrire l'événement $E_\lambda$ à l'aide des événements $(X = 3k)$.*
*$g(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{3n}}{(3n)!}$.*
*-b- Montrer que $g(\lambda)$ est solution du problème de Cauchy de 2)-b-.*
*$P(E_\lambda) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3\lambda}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda) + \dfrac{1}{3}$.*
*4) -a- $P(E_\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 1$, $P(E_\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.*
*-b- $1 - \mathrm{e}^\lambda P(E_\lambda) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}\lambda$.*

## Exercice non préparé - 10min

Soit $E$ un espace vectoriel dimension finie et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire surjective.
On pose $H = \operatorname{Ker} \varphi$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $H \oplus \operatorname{Vect}(x_0) = E$.

**NB** : *l'énoncé me paraît court. Autre question possible : traiter cet exercice dans le cas où $E$ n'est pas de dimension finie.*
**Indications et réponses** $\operatorname{rg} \varphi = 1$ *car...*, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n-1$ *car...*
$\ker \varphi$ *admet un supplémentaire de dimension...*

**NB** *: montrer que nécessaire $x_0 \notin H$. Montrer alors par analyse-synthèse : $H \oplus \operatorname{Vect}(x_0) = E$.*

---

# Planche 13 - CCINP - Vincent

## Exercice préparé - 20min

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de $A$. $A$ est-elle diagonalisable? Montrer que $A$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) -a- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et que l'on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   -b- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 2$.
3) -a- On pose pour tout $t \in ]-1,1[$, $g(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(A^k)}{k} t^k$. Calculer $g(t)$.
   -b- Montrer que : $\forall t \in ]-1,1[$, $\det(I_n - tA)\exp(g(t)) = 1$.
4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $M$ et $n_1, \dots, n_p$ leurs multiplicités respectives.
   On note $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\lambda_i|$.
   -a- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(M^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \lambda_i^k$.
   -b- Soit $t \in ]-1,1[$. Déterminer une expression de $\det(I_n - tM)$ en fonction de $n_i, \lambda_i, p$ et $t$.
5) On s'intéresse à la série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(M^k)}{k} r^k$. On note $R$ son rayon de convergence et $S$ sa somme.
   Montrer que si $m \neq 0$ alors $R \geqslant \dfrac{1}{m}$. Que vaut $R$ dans le cas où $m = 0$?
6) Montrer que $S(t) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \ln(1 - \lambda_i t)$. En déduire que $\det(I_n - tA)\exp(S(t)) = 1$.

**Indications et réponses**

*1) $\chi_A(X) = (X-1)^2$. $A$ non DZ. $A$ TZ (critères classiques de diagonalisabilité).*
*2) -a- Calculs.*
   *-b- Quelle est la diagonale de $(P^{-1}AP)^k$ ?*
*3) -a- $g(t) = -2\ln(1-t)$.*
   *-b- Distinguer $t = 0$, $t \neq 0$. Factoriser par $t$ dans $\det(I_n - tA)$ et utiliser la polynôme caractéristique de $A$.*
*4) -a- Trigonaliser $M$, $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1}$.*
   *$M^k = ....$*
   *-b- Factoriser par $t$ dans $\det(I_n - tM)$ et écrire ce déterminant en fonction du polynôme caractéristique.*
*5) Déterminer d'abord le rayon de convergence de $\sum \dfrac{\lambda_i^k r^k}{k}$. Déduire le résultat par opérations.*
   *Dans le cas où $m = 0$, $R = +\infty$.*
*6) Calcul en utilisant 4)-a- et le DSE de $\ln(1-u)$.*

## Exercice non préparé - 10min

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$.

1) Montrer que $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**Indications et réponses**

*1) On n'oublie pas la continuité par morceaux.*
   *En 0, un équivalent simple. En $+\infty$, on majore.*
*2) La limite est nulle.*
   *On applique le théorème de convergence dominée. Pour la domination, la fonction qui domine doit être intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui amènera sûrement à trouver une fonction définie par cas. Par exemple*
   $$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0,1] \\ \dfrac{1}{x^{3/2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

---

# Planche 14 - CCINP - Julien

## Exercice préparé - 20min

Soit $p \in ]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On lance une pièce avec probabilité $p$ d'obtenir Pile et on note $j$ le rang d'obtention du premier Pile.
On place ensuite $j$ boules numérotées de 1 à $j$ dans une urne et on note $X$ le numéro de la boule tirée.
On note $G$ l'événement : "obtenir une boule de numéro impair".

1) Donner la loi, l'espérance et la variance du rang d'obtention du premier Pile.
2) Montrer qu'il existe des réels $a, b, c$ tels que :
$$\forall t \in ]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{(1-t)^2} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}.$$

3) Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
   -a- Calculer la probabilité de l'événement $G$ sachant qu'on a obtenu pile au rang $2j$.
   Calculer la probabilité de l'événement $G$ sachant qu'on a obtenu pile au rang $2j-1$.
   -b- Montrer que
$$P(G) = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{+\infty} \left( j \int_0^q t^{2j-2}(t+1)\,\mathrm{d}t \right).$$
4) Ecrire alors $P(G)$ sous forme d'une intégrale.
5) Calculer cette intégrale à l'aide de la question 2).
6) A-t-on plus de chance de gagner ou de perdre et y a t-il des conditions idéales pour gagner?

**Indications et réponses**

## Exercice non préparé - 10min

On considère la série entière $\sum (-1)^n \dfrac{z^n}{(n!)^2}$. On note $f$ la somme.

1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) *Question possible* : montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

**Indications et réponses**

---

# Planche 15 - CCINP - Allan

## Exercice préparé - 20min

Soit $\varphi : x \mapsto -x\ln(x)$.
On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(X = n)$.
Lorsque la série $\sum \varphi(p_n)$ converge, on dit que $X$ admet une entropie. La somme de cette série est alors appelée entropie de $X$.

1) Tracer le tableau de variations de $\varphi$, et montrer que $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0 .
2) On suppose que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.
   Montrer $X$ admet une entropie et la calculer.
3) Retour au cas général et on suppose que $X$ est d'espérance finie.
   -a- Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p_n) \leqslant \max(np_n, n\,\mathrm{e}^{-n})$.
   -c- Montrer que $X$ admet une entropie.

**Indications et réponses**

*1)*

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

*2) On utilise les DSE : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.*
$$H(X) = \frac{-p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)}{p}.$$
*3) -a- La série $\sum p_n$ converge, donc....*
*-b- On est amené à distingue $p_n \geqslant \mathrm{e}^{-n}$ et $p_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}$. Et on utilise la monotonie de $\varphi$ dans le deuxième cas.*
*-c- On étudie la convergence des séries $\sum np_n$ et $\sum n\,\mathrm{e}^{-n}$.*

## Exercice non préparé - 10min

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n = 0_n$.

1) En supposant que $M = M^T$, montrer que $M = 0_n$.
2) En supposant que $M$ et $M^T$ commutent, montrer que $M$ est toujours nulle.

**Indications et réponses**

*1) $M$ est DZ car...La seule valeur propre de $M$ est...*
*2) S'intéresser à la matrice $MM^\top$.*

---

# Planche 16 - CCINP - Martin

## Exercice préparé - 20min

Soit $\alpha \in ]0,1[$. On note $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A$ est diagonalisable.
2) -a- Déterminer $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tel que $P^\top AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix}$.
   -b- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ appartienne à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Soient $\alpha \in ]0,1[$ et $\beta \in ]0,1[$. On note $B = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$.

3) Montrer que $B$ est diagonalisable et déterminer $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit diagonale.
4) Montrer que $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de $Q$.

Soient $a, b, c, d$ des rééels strictement positifs et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4) Montrer que $M$ est diagonalisable et qu'elle est semblable à une matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu > 0$ et $\lambda < \mu$.
5) ??

**Indications et réponses**

*1) Très très rapide...*

*2) -a- Comme la matrice diagonale est donnée, étudier directement les sous espaces propres, les noyaux non réduits à $\{0\}$ justifient les valeurs propres, sans perdre de temps à déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique. Penser à donner une matrice $P$ orthogonale, pas seulement inversible, $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.*

*-b- Cours : caractérisation spectrale d'appartenir à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On trouve $\alpha < \frac{1}{2}$.*

*1) Valeurs propres : 1, $1-\alpha-\beta$. $Q = \begin{pmatrix}1 & \beta\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}$.*

*2) La limite est $Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}Q^{-1}$. Penser à la continuité de l'application linéaire $M \mapsto QMQ^{-1}$.*

*3) Deux valeurs propres distinctes à l'aide du polynôme caractéristique.. Utiliser la trace pour prouver les inégalité*

## Exercice non préparé - 10min

On étudie la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2) Calculer la somme de cette série.

### Indications et réponses

*1) $R = 1$*

*2) $f(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ (utiliser la série géométrique et ses dérivées).*

---

# Planche 17 - CCINP - Isaure

## Exercice préparé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Gamma_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+2\alpha xy+y^2 = 1\}.$$

1) Montrer que $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$.
Établir : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+2\alpha xy+y^2 = (x+\alpha y)^2 + (1-\alpha^2)y^2$.
2) Montrer que $\Gamma_\alpha$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que $\Gamma_1$ est la réunion de de deux droites.
De même pour $\Gamma_{-1}$.
4) On pose $\Phi_\alpha : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & xx'+2\alpha(xy'+x'y)+yy'\end{array}$.
   -a- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $]-1,1[$ pour que $\Phi_\alpha$ soit un produit scalaire.
   -b- ??

### Indications et réponses

*1) $(1,0)\in\Gamma_\alpha$. Puis calcul.*

*2) Image d'un réciproque d'un fermé par une fonction continue.*

*3) $\Gamma_1$ est la réunion des droites d'équation $x+y=1$ et $x+y=-1$.
$\Gamma_{-1}$ est la réunion des droites d'équation $x-y=1$ et $x-y=-1$.*

*4) -a- CNS : $|\alpha|<1$ (pour vérifier "définie-positive").
-b- ??*

## Exercice non préparé

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$, $R_n = \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
Montrer que
$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}R_n.$$
2) Montrer qu'il existe un entier $N\in\mathbb{N}$, tel que :
$$\forall n \geqslant N,\quad 0 < R_n < \frac{1}{2}.$$
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin(2\pi n!\,\mathrm{e}) = \sin(2\pi R_n)$.
4) En déduire que e est irrationnel.

### Indications et réponses

*1) Formule de Taylor avec reste intégral appliqué à la fonction* exp.

*2) $R_n > 0$ par théorème classique.
$R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement*

*3) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ est un entier.*

*4) Par l'absurde puis utiliser 2) et 3) avec une valeur judicieuse de $n$.*

---

# Planche 18 - CCINP - Daphnée

## Exercice préparé - 20min

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Déterminer $f'$ et $f''$.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$
On justifiera que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.

3) *Question possible.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et son coefficient dominant vaut 1.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$.

-a- Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_{n,k} \geqslant 0.$$

-b- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

5) ???

**Indications et réponses**

*1)* $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$.

*2) Classique.*

*3) Récurrence. Noter $\alpha_n$ le coefficient du degré $n$.*

*4) -a- Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_{n,k} \geqslant 0.$$

*-b- Utiliser 4)-a-, et le fait que $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

## Exercice non préparé - 10min

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que la série $\sum \ln(1 + a_n)$ diverge.

2) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k) = 0.$$

**Indications et réponses**

*1) Effectuer un développement aymptotique de $\ln(1 + a_n)$, pour prouver que $\ln(1 + a_n) = a_n + b_n$ où $b_n \sim -\frac{1}{2n}$.*

*2) Poser $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$. $\ln(P_n)$ est la somme partielle de la série de la question 1).*

---

# Planche 19 - IMT - Clément

## Exercice 1

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Indications et réponses** *Poser* $f(x, t) = \dfrac{\ln(t)}{x^2 + t^2}$.

*1) Fixer $x > 0$. Ne pas oublier la continuité de $t \mapsto f(x, t)$.*
*En 0 : $f(x, t) \sim \frac{1}{x^2} \ln t$. En $+\infty$, $f(x, t) \sim \frac{\ln t}{t^2}$.*

*2) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre. Domination sur $[a, b]$...*

## Exercice 2

Dans une population, la proportion de gens contaminés par une certaine maladie est $p$ où $p \in ]0, 1[$.
Si on rencontre une personne contaminée, la probabilité que l'on se fasse contaminer est $\dfrac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un commercial non contaminé rencontre $n$ clients.
Posons $N$ la variable aléatoire égale au nombre de clients contaminés qu'il rencontre.

1) Quelle est la loi de $N$?

2) Quelle est la probabilité que le commercial soit contaminé?

**Indications et réponses**

*1) $N \sim \mathcal{B}(n, p)$.*

*2) Calculer $P(C)$ en tilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(N = k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.*
*$P_{N=k}(C)$ se calcule plus facile via le complémentaire.*
$P(C) = 1 - \left(1 - \dfrac{2p}{3}\right)^n$.

---

# Planche 20 - IMT - Clélia

## Exercice 1

Soit $E$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que : $\forall x \in E, < u(x), x >= 0$.

1) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, < u(x), y >= - < u(y), x >$.

2) Que peut-on dire de la matrice associée à $u$ dans une base orthonormée de $E$.

3) Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**Indications et réponses**

*1) Prendre $x + y$ au lieu de $x$ dans l'hypothèse.*

*2) Poser les matrices $A$, $X$, $Y$ de $u, x, y$ dans la base $\mathcal{B}$.*
*Ecrire l'égalité de 1) à l'aide des matrices.*
*Prouver proprement que si $X^\top MY = 0$ pour tout $X, Y$ alors $M$ est nul.*

*3)* $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Im}(u)$. *Puis l'égalité des dimensions... qui permet de conclure.*

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $(E_n) : x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

1) Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera $x_n$.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.
   En déduire la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite.
3) Montrer que $x_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

**Indications et réponses** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $(E_n)$ : $x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

1) *Application classique du théorème de la bijection monotone.*
2) *Minorer* $x_n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.
   *Calculer d'abord la limite de* $\dfrac{x_n}{n}$.
3) $x_n - 1 = x_n - x_n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. *Utiliser l'équivalent usuel de* $(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1$ *en* $0$.

---

# Planche 21 - IMT - Daphnée

## Exercice 1

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $(E) \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$.
*Question possible* : déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**Indications et réponses** *Poser* $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
*On obtient* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n$.
*Puis,* $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0$, $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} a_1$.
*Solution avec conditions initiales :* $a_0 = y(0) = 1$ *et* $a_1 = y'(0) = 0$, $y(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \mathrm{e}^{-x^2}$.

## Exercice 2

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$.
On suppose

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{Id}_E \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1) Montrer que pour tout $i[\![1,n]\!]$, $f_i$ est un projecteur de $E$.
2) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$.

**Indications et réponses**

1) *Calculer* $f_j \circ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$ *de deux manières.*
2) *Pour prouver* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$ *: double inclusion. Une évidente, l'autre utilise la première hypothèse.*
   *Pour la somme directe, prouver l'unicité de la décomposition de* $0_E$ *comme somme de vecteurs de* $\mathrm{Im}\, f_i$.
   *On utilise en cours de route la deuxième hypothèse.*

---

# Planche 22 - IMT - Hugo

## Exercice 1

Soit $E$ un espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 - 5u - 6\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 6\,\mathrm{Id}_E) = E$.

**Indications et réponses** *Par analyse-synthèse.*
*L'analyse fournit l'unicité de la décomposition.*
*Il peut être efficace d'utiliser que* $a \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ *signifie* $u(a) = -a$, $b \in \mathrm{Ker}(u - 6\,\mathrm{Id}_E)$ *signifie* $u(b) = 6b$*; puis* $u^2 - 5u - 6\,\mathrm{Id}_E = (u + \mathrm{Id}_E)(u - 6\,\mathrm{Id}_E) = (u - 6\,\mathrm{Id}_E)(u + \mathrm{Id}_E)$.

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$.

1) Montrer que $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2) Calculer la limite de $u_n$.

**Indications et réponses**

1) *On n'oublie pas la continuité de* $f_n$. *En* $+\infty$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.
2) *Théorème de convergence dominée.* $(f_n)$ *converge simplement vers* $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } |t| < 1 \\ \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$.

---

# Planche 23 - IMT - Martin

## Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.

**Indications et réponses** $R = 1$.
*Utiliser après les avoir démontrées les deux DSE :*

$$\forall t \in ]-1,1[, \quad \mathrm{Arctan}\, t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

*On distingue ensuite : $x > 0$ en posant $x = t^2$; $x < 0$ en posant $x = -t^2$; $x = 0$.*
*Finalement :*

$$f(0) = 1, \qquad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0.$$

## Exercice 2

Soit $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

1) Montrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
2) -a- Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ tel que $M = AB$.
   -b- En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
3) On pose $C = M + I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de $C$. En déduire une condition pour que $C$ soit inversible puis l'expression de l'inverse.

### Indications et réponses

1) *Quelle est la dimension de* $\operatorname{Ker} M$*? Quelle valeur propre obtient-on, sa multiplicité.*
   *Puis par double implication, en utilisant l'expression de la trace en fonction des valeurs propres.*
2) -a- *Un grand classique. La matrice est de rang 1, que dire des colonnes?*
   -b- *Utiliser 2)-a-.*
3) $P = X^2 - (\mathrm{Tr}(M)+2)X + (\mathrm{Tr}(M)+1)I_n$ *est annulateur de* $C$.
   $C$ *est inversible ssi* $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$ *dans ce cas l'inverse est* $I_n - \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(M)+1}M$.

---

# Planche 24 - IMT - Vincent

## Exercice 1

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la première colonne, la dernière colonne et la diagonale sont composées de 1. Les autres coefficients sont nuls.

1) Déterminer $\mathrm{rg}(N)$, une base de $\mathrm{Im}(N)$ et une base de $\mathrm{Ker}(N)$.
2) Déterminer le spectre de $N$. $N$ est-elle diagonalisable?

### Indications et réponses

1) $\mathrm{rg}(N) = n-1$; *base de* $\mathrm{Im}(N)$: $\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$;
   *base de* $\mathrm{Ker}(N)$ : $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.
2) $\chi_N(X) = X(X-1)(X-2)$. *Spectre de* $N$: $\{0, 1, 2\}$.
   $N$ *est DZ : argument très rapide.*

## Exercice 2

Soient $A$ et $B$ deux archers à un concours de tir à l'arc.
$A$ tire en premier et touche la cible avec probabilité $a$ où $a \in ]0,1[$.
Si $A$ rate, $B$ tire et touche la cible avec probabilité $b$ où $b \in ]0,1[$.
Le concours s'arrête lorsque l'un des archers a touché la cible.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à l'instant $2n+1$.
2) Déterminer la probabilité que le joueur $A$ gagne.
3) Déterminer la probabilité que le joueur $B$ gagne.
4) Déterminer la probabilité que la partie ne s'arrête pas.
5) On pose la variable aléatoire $T$ comme le lancer où la partie s'arrête. Calculer l'espérance de $T$.

### Indications et réponses

1) $P(C_n) = (1-a)^n(1-b)^n$.
2) $P(G_A) = \dfrac{a}{a+b-ab}$.
3) $P(G_B) = \dfrac{(1-a)b}{a+b-ab}$.
4) $P(N) = 0$.
5) $P(T = 2n+1) = P(C_n)$, $P(T = 2n) = (1-a)^n(1-b)^{n-1}a$.
   *On somme par paquets des indices pairs et impairs, on utilise* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.
   $E(T) = \dfrac{2a + 2b - a^2 - 3ab - a^2b}{(a+b-ab)^2}$.

---

# Planche 25 - IMT - Ahmed

## Exercice 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n$ converge et calculer $I_n$.
2) Justifier que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

### Indications et réponses

1) *On prouve l'intégrabilité, sans oublier la continuité.*
   *Pour le calcul une IPP bien rédigée :* $I_n = \dfrac{1}{n^2}$.
2) *Théorème d'intégration terme à terme.*

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{où } f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}.$$

3) *Poser* $t = \mathrm{e}^{-x}$ *et se ramener à 2).*

## Exercice 2

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}$.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $A(t)$ est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale $D(t)$ et une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tel que : $A(t) = PD(t)P^\top$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer $A(t)^n$.

### Indications et réponses

*1) $A(t)$ DZ : argument très rapide.*
$D(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$, $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

*2)* $A(t)^n = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(nt) & \operatorname{sh}(nt) \\ \operatorname{sh}(nt) & \operatorname{ch}(nt) \end{pmatrix}$

---

# Planche 26 - IMT - Oscar

## Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1) Montrer que : $\displaystyle\int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)}{\cos^{2n}(x)+\sin^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$.

### Indications et réponses

*1) Changement de variable : $x = \pi - t$.*

*2) On pose $J$, l'intégrale. D'après 1) : $J = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(x)}{\cos^{2n}(x)+\sin^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$. Exploitez la $\pi$-périodicité et la pariét pour écrire $J$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}$.*
*Puis changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$.*
*$J = \frac{\pi}{2}$.*

## Exercice 2

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A + A^{-1} = I_n$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$.
Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k + A^{-k}$.

**Indications et réponses** $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k + A^{-k} 2\cos(\frac{k\pi}{3})$.
**Méthode 1** *: on calcule $(A+A^{-1})^2$, $(A+A^{-1})^3$...pour conjecture une formule pour $A^k + A^{-k} = a_k I_n$.*
*Ce que l'on prouve par récurrence double, et on montre dans l'hérédité que $a_{k+2} = a_{k+1} - a_k$.*
**Méthode 2** *: $A + A^{-1} = I_n$ donne $X^2 - X + 1$ est annulateur de $A$ et $A^{-1}$.*
*On effectue la division euclidienne de $X^k$ par $X^2 - X + 1$ pour exprimer $A^k$ en fonction de $A$ et $I_2$, $A^{-k}$ en fonction de $A$ et $I_2$.*

---

# Planche 27 - IMT - Solène

## Exercice 1

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $f$ vérifie l'équation différentielle : $xf'' + f' - xf = 0$.

### Indications et réponses

*1) Théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètre (la domination est très simple).*

*2) On calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ avec le théorème d'intégrale à paramètre.*
*On effectue une IPP sur $f'(x)$.*

## Exercice 2

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel préhilbertien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Soit $f : E \to E$ une application telle que

$$f(0_E) = 0_E \qquad \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1) Montrer que $f$ conserve le produit scalaire.
2) En déduire que $f$ est linéaire.
De quel type d'endomorphisme s'agit-il?
3) *Question inconnue.*

### Indications et réponses

*1) Élever au carré l'égalité de l'hypothèse. Développer $\|a - b\|^2 = (a - b|a - b) = \ldots$.*
*Prouver $\|f(x)\| = \|x\|$ qui sera utile.*

*2) Calculer $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2$ et $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2$.*
*C'est une isométrie.*

*3) Question inconnue.*

---

# Planche 28 - IMT - Zoé

## Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.

1) $A$ est-elle diagonalisable?
2) On pose $M = A + I_n$.
   -a- Calculer $M^2$.
   -b- En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.
3) Déterminer les valeurs propres de $A$ et de $M$.

### Indications et réponses

*1) Très très rapide.*

*2) -a- $M^2 = nM$.*

-b- $A^2+(2-n)A=(n-1)I$. *A inversible avec* $A^{-1}=\dfrac{1}{n-1}A+\frac{2-n}{n-1}I$.

*3)* $\mathrm{Sp}(A)=\{n-1,-1\}$ *(utiliser* $\mathrm{rg}(A+I)$ *et la trace).* $\mathrm{Sp}(N)=\{n,0\}$ *(exprier* $\chi_N$*) en fonction de* $\chi_A$*).*

## Exercice 2

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $t\in[-1,1]$, on pose $f_n(t)=\sin(\pi t)t^n$.

1) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$. On note $F$ sa somme.
La convergence est-elle uniforme?

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**Indications et réponses**

*1)* $\sum f_n$ *converge simplement vers* $F : t\mapsto \begin{cases}\frac{\sin(\pi t)}{1-t} & \text{si } t\in[-1,1[\\ 0 & \text{si } t=1\end{cases}$. *La convergence n'est pas uniforme car....(que dire de* $F$*?)*

*2) Théorème d'intégration terme à terme : à l'aide d'une IPP puis d'une majoration montrer que* $\displaystyle\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$.