Ex 1

$(E_n) : x^n + x - 1 = 0$ $\quad f_n(x) = x^n + x - 1$

1/ f_n est continue et strictement ↗ sur $]0,+\infty[$ comme somme de $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x-1$ qui le sont et $]0,+\infty[$ est un intervalle

Donc d'après le TBR, f_n réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_n(]0,+\infty[) =]\lim_0 f_n, \lim_{+\infty} f_n[=]-1,+\infty[$

Or $0 \in]-1,+\infty[$ donc 0 admet un unique antécédent par f_n de $]0,+\infty[$

donc (E_n) admet une unique solution dans $]0,+\infty[$

Notons la x_n

2) $f_n(1) = 1 > 0 = f_n(x_n)$

Donc par strict ↗ de f_n, $1 > x_n$.

On a donc bien $\forall n, x_n \in]0,1[$ ($x_n > 0$ d'après 1/)

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\forall x \in]0,1[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) < 0$

Avec $x = x_n \in]0,1[$ d'après 2/ :

$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = f_{n+1}(x_n) < 0$ car $f_n(x_n) = 0$

Comme $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, on a :

$f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$

D'où par strict ↗ de f_{n+1} : $x_n < x_{n+1}$

Donc (x_n) ↗

4/ De plus (x_n) est minorée par 1) d'après 2/ donc d'après le th de la limite monotone (x_n) CV

Notons ℓ la limite.

On passe à la limite $0 < x_n < 1$ donc $0 \leq \ell \leq 1$.

. Supposons par l'absurde : $\ell < 1$

Comme (x_n) ↗ alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq \ell$

On élève à la puissance n, fonction ↗ sur $\mathbb{R}_+$:

$0 \leq x_n^n \leq \ell^n$

Comme $\ell \in [0,1[$ alors $\ell^n \to 0$

D'où par th des gendarmes : $x_n^n \longrightarrow 0$

On passe alors à la limite $x_n^n + x_n - 1 = 0$

d'où $0 + \ell - 1 = 0$ càd $\ell = 1$: absurde.

. Donc $\ell = 1$.

Bilan : $\boxed{(x_n) \text{ CV vers } 1.}$

Ex 2

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$$

- Si $\alpha < 0$ alors $2\alpha < 0$ donc

$$n^{2\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-2\alpha} \leq 1$$

donc si n est impair $n^{2\alpha} + 1 \leq 0$

donc u_n n'est pas défini

- Si $\alpha = 0$, $n^{2\alpha} = 1$, même pb.

. Désormais $\alpha > 0$ dans ce cas pour

$n \geq 2$, $n^{2\alpha} > 1$ donc $n^{2\alpha} + (-1) > 0$.

donc u_n est bien défini

- $n^{2\alpha} + (-1)^n \underset{+\infty}{\sim} n^{2\alpha}$ car $n^{2\alpha} \to +\infty$ et $((-1)^n)$ bornée

Donc $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n^{2\alpha}}} = \frac{1}{n^\alpha}$

- Si $\alpha > 1$ alors comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV (Riemann),

$\sum u_n$ CV absolument donc CV par comparaison de SATP

- Si $0 < \alpha \leq 1$

$$u_n = (-1)^n \left(n^{2\alpha} + (-1)^n\right)^{-\frac{1}{2}} = (-1)^n \left[n^{-\alpha} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} (-1)^n \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)}_{= b_n} \quad \text{où } b_n \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3\alpha}}$$

- $\sum \frac{1}{n^{3\alpha}}$ CV ssi $3\alpha > 1$ càd $\alpha > \frac{1}{3}$

donc $\sum -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3\alpha}}$ aussi donc par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum b_n$ aussi.

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV par CSSA, en effet:
  - $\left(\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| \right) = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ↘ vers 0 car $\alpha > 0$
  - $(-1)^n \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} > 0$

. Par somme :

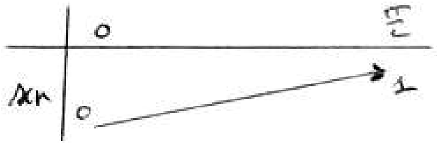
$$\sum u_n \text{ CV ssi } \alpha > \frac{1}{3}$$

Bilan : $\boxed{\sum u_n \text{ CV ssi } \alpha \in \left]\tfrac{1}{3}, +\infty\right[}$

Ex 5

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

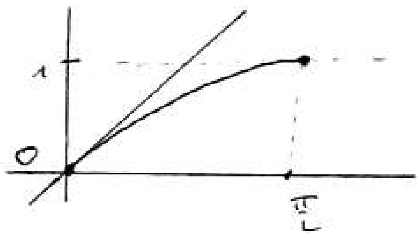
1/



2/a- $]0,\frac{\pi}{2}]$ est stable par sin car $\sin(]0,\frac{\pi}{2}]) =]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$

Comme $u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}]$ alors par récurrence on prouve $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\frac{\pi}{2}]$.

• Puis par inégalité de convexité, comme sin est concave sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$



Une étude de fonction permet de prouver le résultat.

On prendra $x = u_n$: $\sin(u_n) < u_n$

càd $u_{n+1} < u_n$

D'où le résultat voulu.

-b- D'après 2/-a. $(u_n) \downarrow$ et minorée par 0 donc (u_n) cv d'après le th. de la limite monotone.

Notons ℓ la limite.

On passe à la limite $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on obtient $\ell = \sin(\ell)$ càd $\ell = 0$ (cf graphique ou une étude de fonction le prouve)

3/ $u_n - u_{n+1} = u_n - \sin(u_n)$

$\sim \frac{u_n^3}{6}$ on a utilisé $\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \\ \text{et } u_n \to 0 \end{cases}$

Comme (u_n) est une suite cv alors la série télescopique $\sum (u_n - u_{n+1})$ cv

Or $\sum \frac{u_n^3}{6}$ est une SATP donc par comparaison $\sum \frac{u_n^3}{6}$ cv

et donc par opérations $\sum u_n^3$ cv

4/ $v_n = \frac{u_n^2 - \sin^2(u_n)}{u_n^2 \sin^2(u_n)} = \frac{u_n^2 - \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^4)\right)^2}{u_n^2 \sin^2(u_n)}$

$= \frac{2\frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)}{u_n^2 \sin^2(u_n)} \sim \frac{1}{3} \frac{u_n^4}{u_n^4} = \frac{1}{3}$

5/ D'après 4/ et le lemme de Cesaro :

$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \to \frac{1}{3}$ càd $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \to \frac{1}{3}$

Comme $u_n \to 0$ alors $\frac{1}{u_n^2} \to +\infty$

donc $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{1}{u_n^2}$

D'où : $\frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$ càd $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$

Comme $u_n > 0$, $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$