Ex 40

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad f : M \longmapsto \mathrm{Tr}(M)A - M$

$A \neq O_n$

1/ $P = X^2 - (\mathrm{Tr}(A)-2)X + 1 - \mathrm{Tr}(A)$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$P(f)(M) = f^2(M) - (\mathrm{Tr}(A)-2)f(M) + (1-\mathrm{Tr}(A))M$

(car $P(f) = f^2 - (\mathrm{Tr}(A)-2)f + (1-\mathrm{Tr}(A))\,\mathrm{Id}$)

Or $f^2(M) = f(f(M)) = f(\mathrm{Tr}(M)A - M)$

$= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Tr}(M)A - M\right)A - (\mathrm{Tr}(M)A - M)$

$= (\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(M))A - \mathrm{Tr}(M)A + M$

$\underline{f^2(M) = \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(A) - 2\,\mathrm{Tr}(M)A + M}$

$P(f)(M) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A) - 2\mathrm{Tr}(M)A + M - (\mathrm{Tr}(A)-2)(\mathrm{Tr}(M)A - M)$

$+ (1-\mathrm{Tr}(A))M$

$= \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A) - 2\mathrm{Tr}(M)A + M - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(A)M$

$+ 2\,\mathrm{Tr}(M)A - 2M + M - \mathrm{Tr}(A)M$

$\underline{P(f)(M) = O_n}$

D'où $\underline{P(f) = O_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}}$

2/ On remarque -1 est racine de P,

$P = (X+1)(X + 1 - \mathrm{Tr}(A))$

L'autre racine est $-1 + \mathrm{Tr}(A)$.

- $\underline{\text{Si } \mathrm{Tr}(A) \neq 0 :}$ P est scindé à racines simples et de plus annulateur de f donc f est DZ.

- $\underline{\text{Si } \mathrm{Tr}(A) = 0}$ $\quad P = (X+1)^2$ et P annulateur de f

donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1\}$. Comme $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$

alors $\mathrm{Sp}(f) = \{-1\}$.

Par l'absurde supp f DZ.

Comme f n'admet qu'une seule vp alors $f = -\mathrm{Id}$. En effet, f DZ donc il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -I$

donc $f = -\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

càd : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$

— , $\mathrm{Tr}(M)A - M = -M$

— , $\mathrm{Tr}(M)A = 0$

— , $\mathrm{Tr}(M) = 0$ car A non nul

Absurde, prendre $M = I_n$.

Donc f n'est pas DZ.

- Bilan : $\boxed{f \text{ DZ} \iff \mathrm{Tr}(A) \neq 0}$

Ex 41

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: pas de vp commune

1/ Notons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les vp de A

Alors $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n} (B - \lambda_i I)$

donc $\det(\chi_A(B)) = \prod_{i=1}^{n} \det(B - \lambda_i I)$

Par hypothèse : $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \notin Sp(B)$

donc $\det(B - \lambda_i I) \neq 0$

d'où $\det \chi_A(B) \neq 0$

donc $\chi_A(B)$ est inversible

Posons M tq : $AM = MB$

2/ Par récurrence : Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: " $A^k M = M B^k$ "

(I) $k=0$: $A^0 M = M = M B^0$

(H) Soit $k \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(k)$ vrai, Alors au rang $k+1$:

$A^{k+1} M = A A^k M = A M B^k$ (par HR)

$= M B B^k$ car $AM = BM$

$= M B^{k+1}$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ vrai.

(C) $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M B^k$.

3/ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Alors $P(A) M = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k M = \sum_{k=0}^{n} a_k M B^k$ (2/)

$P(A) M = M P(B)$

4/ Avec $P = \chi_A$:

$\chi_A(A) M = M \chi_A(B)$

Par Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0_n$

donc $M \chi_A(B) = 0_n$

Or $\chi_A(B)$ inversible d'après 1/

Donc $M = 0_n$.

Ex 42

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A^2 + A^T = I_n$ $(*)$

1/. On transpose : $(A^2)^T = (A^T)^2$ et par linéarité :

$$(A^T)^2 + A = I_n \quad (**)$$

On isole A^T de $(*)$: $A^T = -A^2 + I_n$

on remplace dans $(**)$

$(-A^2 + I_n)^2 + A = I_n$ d'où $\underline{A^4 - 2A^2 + A = O_n}$

On pose $\underline{P = X^4 - 2X^2 + X}$ alors $P(A) = O_n$

- 1 racine de P : $P = X(X-1)(X^2+X-1)$
- $Sp(A) \subset Rad(P) = \left\{0, 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

2/. Supp $0 \notin Sp(A)$ donc $\underline{A \text{ inversible}}$

- De $(**)$ on tire : $A - I_n = -(A^T)^2$

$$\det(A - I_n) = (-1)^n \det((A^T)^2) = (-1)^n (\det A^T)^2 = (-1)^n (\det A)^2 \neq 0 \text{ car } A \text{ inversible}$$

donc $\underline{A - I_n \text{ inversible}}$

- $P(A) = O_n$ donc $A(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = O_n$

A inversible et $A - I_n$ inversible donc en multipliant par A^{-1}, $(A-I_n)^{-1}$: $A^2 + A - I_n = O_n$

Or d'après $(*)$: $A^2 = I_n - A^T$, on remplace :

$I_n - A^T + A - I_n = O_n$ donc $A = A^T$

Donc $\boxed{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$

Ex 43 $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = O_n$

1/ Posons $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X$ $P(A) = O_n$.

$Sp(A) \subset Rad(P)$

$P = X(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$

Soit $\begin{cases} z \in \mathbb{C}, \\ z \neq 1 \end{cases}$ $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\frac{1 - z^5}{1 - z} = 0$ $(\text{si } z \neq 1)$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^5 = 1$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$

D'où les racines de P : 0, $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ et $1 \leq k \leq 4$

Comme A symétrique réelle alors d'après le th. spectral A est DZ et admet des vp réelles

Comme les $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ sont complexes non réels pour $1 \leq k \leq$

Donc $\underline{Sp(A) \subset \{0\}}$

2/ Comme $Sp(A) \neq \emptyset$: $\underline{Sp(A) = \{0\}}$

On reprend la diagonalisabilité de A :

$A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{A = O_n}$