Ex 14

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ on pose $u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$

1/ • Si $x=0$, $u_n(0)=0$ donc $\sum u_n(0)$ CV, $\underline{S(0)=0.}$

• Si $x\neq 0$, $u_n(x) \sim \frac{1}{xn^2}$

$\sum u_n(x)$ série à terme de signe constant

et $\sum \frac{1}{xn^2}$ CV $(2>1)$

Donc par comparaison, $\sum u_n(x)$ CV

Conclusion $\underline{S \text{ définie sur } \mathbb{R}}$ (car $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}$).

• □ $\forall n$, $u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

□ $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}$

□ $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

Soit $a>0$, $|u_n'(x)| = \frac{1}{n} \frac{|1-nx^2|}{|1+nx^2|^2} \leq \frac{1}{n} \frac{1+nx^2}{(1+nx^2)^2}$

$\leq \frac{1}{n} \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n^2 a^2}$: TG d'une série CV

Donc $\sum u_n'$ CVN donc CVU sur $[a,+\infty[$

Par transfert, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$

pour tout $a>0$ donc S $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par imparité, $\underline{S \ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$.

2/ $f : x \longmapsto \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tq $x<y$ alors $x^2<y^2$

donc $\frac{1}{n} \frac{1}{1+ny^2} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{1+nx^2}$

D'où $f(y) \leq f(x)$

Donc $\underline{f \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

• Comme $f \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\lim_{0^+} f$ existe : $+\infty$ ou finie

Supposons qu'elle soit finie, notons la ℓ.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $f(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)}$

On passe à la limite, la somme est finie on peut intervertir :

$$\ell \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Or : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ d'où l'absurdité

D'où $\underline{\lim_{0} f = +\infty}$

Ex 12

$f_n(x) = \cos^n x \sin x$

1) . Soit $x \in \mathbb{R}$

. Si $x \equiv 0\ [\pi]$ alors $f_n(x) = 0 \longrightarrow 0$

. Sinon, $|\cos x| < 1$ donc $\cos^n x \longrightarrow 0$

donc $f_n(x) \to 0$

Donc $f_n \xrightarrow{CVS} [x \mapsto 0]$ sur $\mathbb{R}$

. Comme $n a^n \longrightarrow 0$ si $|a| < 1$, même raisonnement

$n f_n \xrightarrow{CVS} [x \mapsto 0]$ sur $\mathbb{R}$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n f_n(t)\,dt = n\left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{n}{n+1}\Big(1 - \underbrace{\cos^{n+1}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big) \longrightarrow 1$$

Donc $\int_0^{\pi/2} n f_n \not\longrightarrow \int_0^{\pi/2} 0$

donc $n f_n$ ne CV pas uniformément vers 0 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

3) Par produit f_n dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -n \sin x \cos^{n-1} x \sin x + \cos^n x \cos x$

$= -n(1 - \cos^2 x)\cos^{n-1} x + \cos^{n+1} x$

$= \cos^{n-1} x \left((n+1)\cos^2 x - n\right)$

$f_n'(x) = 0 \iff \cos^{n-1} x = 0$ ou $\cos^2 x = \frac{n}{n+1}$

On pose $\alpha_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ alors :

$\cos^2(\operatorname{Arccos}\alpha_n) = \frac{n}{n+1}$.

On a bien $\alpha_n \in]0,1[$ et $f_n'(\operatorname{Arccos}(\alpha_n)) = 0$

5) Sur $[0, \pi/2]$, f_n' s'annule en $0, \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arccos}(\alpha_n)$

	0		$\operatorname{Arccos}(\alpha_n)$		$\frac{\pi}{2}$
f_n'	0	$+$	0	$-$	0
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\operatorname{Arccos}\alpha_n)$	$\searrow$	0

$f_n(\operatorname{Arccos}\alpha_n) = \alpha_n^n \sin(\operatorname{Arccos}\alpha_n)$
$= \alpha_n^n\sqrt{1 - \alpha_n^2}$

Sur $[0, \pi/2]$, $\cos^{n-1} x \geq 0$; $(n+1)\cos^2 x - n > 0 \iff \cos^2 x > \frac{n}{n+1}$

$\iff \cos x > \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \alpha_n$

$\iff x < \operatorname{Arccos}(\alpha_n)$

6) $|f_n|$ est π périodique et pair on étudie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Donc : $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = |f_n(\operatorname{Arccos}\alpha_n)| = \alpha_n^n\sqrt{1 - \alpha_n^2}$ et f_n bornée

7) $\cancel{\sup_{\mathbb{R}}} |f_n| = \|f_n\|_\infty = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \sqrt{1 - \frac{n}{n+1}}$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1}{n+1}}$

$= e^{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \sqrt{\frac{1}{n+1}}$

$\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n}{2} \times \left(-\frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2}$

donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}}$ d'où $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

Donc $f_n \xrightarrow{CVU} f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$