Cindy Pham CCINP

Exercice préparé

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant \sqrt{n} \\ \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \end{cases} \qquad h(x) = e^{-x^2}$$

1) Inégalité de convexité classique : comme $\ln$ est concave

$\forall u \in]0, +\infty[$, $\ln(u) \leq u - 1$

Avec $t \in [0, 1[$, $u = 1 - t$:

$\ln(1-t) \leq -t$

2/ a – Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$x \in [0, \sqrt{n_0}]$ il suffit de prendre $n_0 \geqslant x^2$

Dans ce cas, $\forall n \geqslant n_0$, $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{n_0}$ et $x \in [0, \sqrt{n}]$.

– b. Dès lors pour $n \geqslant n_0$: $h_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$

Et $n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2 \longrightarrow -x^2$

On compose la limite par exp : $h_n(x) \longrightarrow e^{-x^2}$

Donc (h_n) CVS vers h

– c – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

→ Si $x \in [0, \sqrt{n}]$, $h_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$

$\leq e^{-n \frac{x^2}{n}}$: 1) + croissance de exp.

$= e^{-x^2}$

→ Si $x > \sqrt{n}$: $h_n(x) = 0 \leq e^{-x^2}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, |h_n(x)| \leq h(x)$

3) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$

a) $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n du$

$u \longmapsto \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n$ continue sur le segment $[0,\sqrt{n}]$

Donc $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du$ CV.

On pose $u = \sqrt{n}\sin(t)$ alors $du = \sqrt{n}\cos t\,dt$

$$\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\,dt = \sqrt{n}\,I_{2n+1}.$$

b) D'après 2)-b- et 2-b-

- h_n est cpm sur $[0,+\infty[$
- h_n cvs vers h sur $[0,+\infty[$
- h est cpm sur $[0,+\infty[$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |h_n(x)| \leq h(x)$; h cpm sur $[0,+\infty[$

et $h(x) = e^{-x^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (par cc)

et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable en $+\infty$

donc h intégrable en $+\infty$.

D'après le TCD : $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du \longrightarrow \int_0^{+\infty} h(u)\,du$

c-à-d $\sqrt{n}\,I_{2n+1} \longrightarrow \int_0^{+\infty} h(u)\,du$

4) Grâce à une IPP classique on montre que

$(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t \,dt$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) & u'(t) = (n+1)\cos^n t \times (-\sin t) \\ v'(t) = \cos(t) & v(t) = \sin t \end{cases}$

u, v $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$

$$I_{n+2} = \underbrace{\Big[\quad\Big]}_{=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^n t \sin^2 t \,dt$$

$$= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \quad \text{avec } \sin^2 = 1 - \cos^2$$

D'où le résultat voulu

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$$

donc $(n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n$

D'où $\big((n+1) I_{n+1} I_n\big)$ constante de valeur :

$$(0+1) I_1 I_0 = \pi/2$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \pi/2 \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

5) On admet $I_n \sim I_{n+1}$.

d'où $(n+1) I_{n+1} I_n \sim n I_n^2$

et donc $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$

Donc $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \sim \sqrt{n}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Rem : pour prouver $I_n \sim I_{n+1}$.

On montre que $(I_n) \searrow$ et donc $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

D'où $\underbrace{\dfrac{I_{n+2}}{I_n}}_{= \frac{n+1}{n+2} \sim 1} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$