Ex44.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1/ $B \in \mathcal{S}_6(\mathbb{R})$ donc par th spectral B est DZ

2/ $rg(B) = 2$ car C_1, C_2 (de B) ne sont pas proportionnelles et les autres colonnes sont égales à C_1 ou C_2.

donc $\dim \operatorname{Ker} B = 4$.

Donc 0 est une vp de multiplicité ≥ 4.

- $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad BX = 9\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 9X$ donc $9 \in Sp(B)$

- Avec la trace on trouve la vp manquante

$Tr(B) = 4\times 0 + 9 + ? = 12$

donc la vp manquante est 3.

$Sp(B) = \{0, 9, 3\}$ $\quad$ 0 de multiplicité 4

3, 9 — 1

Or : $\dim(E_0(B)) = \dim \operatorname{Ker} B = 4 = m_0$

et $\dim E_3(B) = \dim E_9(B) = 1$ = multiplicité de 3 et 9.

Donc par l'une des carac de la DZ :

B est DZ.

- $E_9(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, bonne dimension , et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_9(B)$

- Dans B : $C_3 = C_5 = C_1$ $\quad C_2 = C_4 = C_6$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B$

$\quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4$

. (X_1, X_2, X_3, X_4) libre (prendre une CL nulle de ces vecteurs)

. $\operatorname{Card}(X_1 \dots X_4) = \dim \operatorname{Ker} B$

donc (X_1, X_2, X_3, X_4) base de $\operatorname{Ker} B$.

- $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on prend $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$AY = \begin{pmatrix} AU + AU + AU \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} U \\ U \\ U \end{pmatrix} = 3Y$

donc 3 ~~$\neq 5$~~, $Y \in E_3(B)$

D'où $E_3(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Ex 48

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $AX = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5X$ donc $5 \in Sp(A)$

- $C_1 = C_2$ donc A n'est pas inversible donc $0 \in Sp(A)$

- On trouve la 3ᵉ vp avec la trace qui est la somme des vp : $Tr(A) = 3 = 5 + 0 + ?$

  D'où -2 est vp.

- A admet 3 vp simples donc χ_A est scindé-simple donc A est DZ

Ex 49

$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

1/ Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $X^2 = D$

$XD = X \times X^2 = X^2 \times X = DX$ donc D, X commutent

• Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$XD = DX$ donc : $\begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} 4b = b \\ c = 4c \end{cases}$ c.à.d : $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ d'où $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

donc X est diagonale

2) On cherche donc les matrices X tq $X^2 = D$ parmi les matrices diagonales $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$X^2 = D \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

$X^2 = D \iff X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\chi_A(X) = (X+2)(X-7) + 18 = X^2 - 5X + 4$

$= (X-1)(X-4)$

χ_A est scindé simple donc A est DZ

Comme $Sp(A) = \{1, 4\}$ alors A et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ semblables

4) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq : $D = P^{-1} A P$

$A = P D P^{-1}$

$Y^2 = A \iff Y^2 = P D P^{-1}$

$\iff P^{-1} Y^2 P = D$

$\iff (P^{-1} Y P)^2 = D$

$\iff P^{-1} Y P \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \right\}$

$Y^2 = A \iff Y \in \left\{ P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}$