Martin Dozé - INT

Ex 1

1/ $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ $\quad a_n = \frac{1}{2n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0,\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3} \sim 1$ $\quad$ Donc $\underline{R = 1}$

2/ • On utilise les développements usuels de rayon de CV 1

$\text{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ obtenu en intégrant $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ——— $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

$\left(\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\right.$ facile à intégrer$\left.\right)$

• Pour $x>0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Pour $x<0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} \times \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-x}} \text{Arctan}(\sqrt{-x})$$

• Pour $x=0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = 1$

Ex 2

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad rg(M) = 1$

1/ D'après le th du rang $\dim \text{Ker}(M) = n-1$.

Donc 0 est vp de multiplicité $\geq n-1$.

La vp manquante λ vaut : $\lambda = \text{Tr}(M)$

car avec la trace $\text{Tr}(M) = (n-1)\times 0 + \lambda$

~~M est DZ $\Longleftrightarrow \begin{cases} \dim \ker M = m_0 \\ \dim \end{cases}$~~

$\Rightarrow$. Supp M DZ Alors $\dim \ker M = m_0$

donc $m_0 = n-1$ donc $\lambda \neq 0$ soit $Tr(M) \neq 0$

$\Leftarrow$. Supp $Tr(M) \neq 0$

Alors 0 est de multiplicité $n-1$ égal à $\dim \ker M$

et $\lambda = Tr(M)$ est vp simple.

Donc la dim des sep est égale à la multiplicité des vp donc $\underline{M \text{ est DZ}}$

D'où l'équivalence voulue

2) . a. $rg(M) = 1$ donc tous les colonnes sont 2 à 2 ~~prop~~ proportionnelles

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $A \neq 0$ tq :

$$M = \begin{pmatrix} b_1 A & \Big| & \cdots & \Big| & b_n A \end{pmatrix} \quad \text{où } (b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$$

On pose $B = (b_1 \dots b_n)$ alors $\underline{M = AB}$

- b - D'où $M^2 = ABAB = A(BA)B$

$BA = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = Tr(M)$

D'où $\underline{M^2 = Tr(M) M}$

3) $(M + I_n)^2 = M^2 + 2M + I_n = (Tr(M) + 2) M + I_n$

$= (Tr(M)+2)(M + I_n) - (Tr(M)+2) I_n + I_n$

D'où $(M+I_n)\left[M + I_n - (Tr(M)+2) I_n \right] = -(Tr(M)+1) I_n$

càd $(M+I_n)\left[M - (Tr(M)+1) I_n \right] = -(Tr(M)+1) I_n$

Si $Tr(M)+1 \neq 0$ càd $(M+I_n)\left(I_n - \frac{1}{Tr(M)+1} M \right) = I_n$

Donc $M + I_n$ inversible d'inverse $I_n - \frac{1}{Tr(M)+1} M$

Si $Tr(M)+1 \neq 0$ $(M + I_n) M = 0$. Si $M + I_n$ était inversible alors en multip par $(M+I_n)^{-1}$ on aurait $M = 0$