Ex 18

$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$

1/. $t \longmapsto \frac{1}{1+t^3}$ et $t \longmapsto \frac{t}{1+t^3}$ continues sur $[0,+\infty[$

. Ces fonctions sont positives

. $\frac{1}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \qquad \frac{t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ CV car $2>1$, $3>1$

Donc par comparaison, I, J convergent.

2) On pose $u = \frac{1}{t}$ $\quad t \mapsto \frac{1}{t}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$,

strictement $\searrow$, bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$

Donc $I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{u^3}} \cdot -\frac{1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^3+1} du$

$I = J$

3) $I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t+t^2} dt$

car $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$

D'où $I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt$

$= \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}} t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} dt$

$I + J = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left[\text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

D'où $\boxed{I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

Ex 19

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2} \ln x \, dx$ On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^2} \ln(x)$

1/. f_n continue sur $]0,1[$

. En 0 : . $x^n \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc f_n prolongeable par continuité en 0

. Si $n=0$, $f(x) = \frac{\ln x}{1-x^2} \underset{0}{\sim} \ln x$: intégrable en 0.

Dans les deux cas $\int_0^{1/2} f_n$ converge.

. En 1 : $f(x) = \frac{x^n}{1+x} \frac{\ln x}{x-1} \times (-1)$

or $\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} -\frac{1}{2}$: limite finie

Donc f_n prolongeable par continuité en 1

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n existe

2/ . $\forall n, f_n$ continue par morceaux sur $]0,1[$

. Pour $x \in]0,1[$, $x^n \longrightarrow 0$ donc $f_n \xrightarrow{CVS} [x \longmapsto 0]$

. $x \longmapsto 0$ est cpm sur $]0,1[$.

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|f_n(x)| \leq \frac{|\ln x|}{1-x^2} = |f_0(x)|$

$|f_0|$ intégrable d'après 1/.

Donc d'après le th de CV dominée

$I_n \longrightarrow 0$.