Gabriel Sein CCINP

Ex préparé

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt$$

1) Soit $A > 0$ $x > 0$

On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t+x} & u'(t) = -\frac{1}{(t+x)^2} \\ v'(t) = \sin t & v(t) = -\cos t \end{cases}$

u, v $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$

Donc $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt$

$\displaystyle = -\frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt$

2) a. $x > 0$ $t \mapsto \frac{\cos t}{(t+x)^2}$ continue sur $[0, +\infty[$

$\left|\frac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(t+x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$: intég. en $+\infty$

Donc $t \mapsto \frac{\cos t}{(t+x)^2}$ intégrable en $+\infty$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt$ cv

b. $\underline{x > 0}$ $\left|\frac{\cos A}{A+x}\right| \leq \frac{1}{A+x} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

On peut donc faire tendre $A \to +\infty$ ds 1), par op :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt$$

$\underline{x = 0}$ $g(0)$ existe (admis par l'énoncé).

3) On pose $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ et $f(x,t) = \frac{\cos t}{(t+x)^2}$

. $\forall x>0$, $t \mapsto f(x,t)$ est cpm sur $[0,+\infty[$ et intégrable

car $\left|\frac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{t^2}$: inté en $+\infty$

. $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

. $\forall x>0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2\frac{\cos t}{(t+x)^3}$ est cpm sur $[0,+\infty[$

et intégrable car :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2}{t^3} \text{ : inté en } +\infty$$

. $\forall x>0$, $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 6\frac{\cos t}{(t+x)^4}$ cpm sur $[0,+\infty[$.

. $\forall t \in [0,+\infty[$, $\forall x \in [a,+\infty[$, où $a>0$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 6\frac{\cos t}{(a+t)^4} \leq \frac{6}{(a+t)^4} \text{ : inté en } +\infty$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{t^4}$$

Donc h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

par somme g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) = \frac{2}{x^3} - 6\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^4}\,dt$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \cos t & u'(t) = -\sin t \\ v'(t) = \frac{1}{(t+x)^4} & v(t) = -\frac{1}{3}\frac{1}{(t+x)^3} \end{cases}$ u, v $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$

$|u(t)v(t)| = \frac{1}{3}\frac{|\cos t|}{|(t+x)|^3} \leq \frac{1}{3}\frac{1}{(t+x)^3} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $u(0)v(0) = -\frac{1}{3x^3}$

D'où par IPP : $g''(x) = \frac{2}{x^3} - 6\left[+\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(t+x)^3}\,dt\right]$

$$g''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(t+x)^3}\,dt$$

Une nouvelle IPP donne :

$$g''(x) = 2\left[0 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x} - g(x)$$

D'où $\underline{g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}}$

5/ On reutilise 2)-b-

On observe : $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt$

Donc : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{t+x} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,dt$

On pose $h(t,x) = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto h(t,x)$ est $\underbrace{\text{cpm et intégrable}}^{\text{sur }]0,+\infty[}$ car :

. $\underline{\text{au } V(0)}$: $h(t,x) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2(t+x)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $t \mapsto h(t,x)$ est prolongeable par continuité

. $\underline{\text{au } V(+\infty)}$: $|h(t,x)| \leq \frac{2}{(t+x)^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{2}}\right)$: intégrable en $+\infty$

. $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto h(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$

. $\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|h(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$: intégrable sur $]0,+\infty[$.
(c'est le cas $x=0$ ds le 1er point).

Donc g continue sur $\mathbb{R}_+$

Exercice non préparé.

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ac=5 \\ abc=2 \end{cases}$$

1) Soit a, b, c solution du système

$P=(X-a)(X-b)(X-c)$

$=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$

$=X^3-4X^2+5X-2$

$=(X-1)(X^2-3X+2)$

$=(X-1)^2(X-2)$

2) Donc $(a,b,c)\in\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$

Réciproquement ces trois triplets conviennent.

Conclusion: $\mathcal{S}=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$

Ahmed Chenane - IMT

Exercice 1

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; I_n = \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \, dx$

1/ $\cdot \; f_n : x \longmapsto x e^{-nx}$ continue sur $[0, +\infty[$

$\cdot$ En $+\infty$, $x e^{-nx} = \frac{1}{x^2} \underbrace{x^3 e^{-nx}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$: intégrable en $+\infty$

Donc I_n converge

$\cdot$ On effectue une IPP, on pose

$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-nx} & v(x) = -\frac{1}{n} e^{-nx} \end{cases}$ $\quad u, v \; \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

$u(x)v(x) = -\frac{1}{n} x e^{-nx} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad u(0)v(0) = 0$

Donc $\int_0^{+\infty} u'v$ converge et :

$I_n = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \, dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$

2) $\cdot \; \forall n \in \mathbb{N}$, f_n est cpm et intégrable sur $[0, +\infty[$ ainsi sur $]0, +\infty[$

$\cdot \; \forall x \in]0, +\infty[$, $0 \le e^{-x} < 1$, donc la série géométrique

$\sum f_n(x)$ converge : $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx} = \frac{x}{1 - e^{-x}} e^{-x} = \frac{x}{e^x - 1}$

Donc $\sum f_n$ CVS sur $]0, +\infty[$ vers $f : x \longmapsto \frac{x}{e^x - 1}$

$\cdot$ f est cpm sur $]0, +\infty[$

$\cdot \; \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{n^2}$

donc $\sum \int |f_n|$ CV

Donc par intégration terme à terme $f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)$$

càd: $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3) On pose $x = -\ln t$, $t \mapsto -\ln t$ est $\mathcal{C}^1$ strict ↘ sur $]0,1[$ et réalise une bijection de $]0,1[$ vers $]0,+\infty[$

Alors $dx = -\frac{1}{t}\,dt$ et $e^{-x} = t$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx = \int_1^{0} \frac{-\ln t}{\frac{1}{t}-1}\left(-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$$

Ex 2.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$$

1) A(t) est symétrique réelle donc est diagonalisable de plus il existe $P(t)\in O_2(\mathbb{R})$ et $D(t)$ diagonale tq:

$$A(t) = P(t)D(t)P(t)^T$$

On remarque:

$$A(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t)+sh(t) \\ sh(t)+ch(t)\end{pmatrix} = (ch(t)+sh(t))\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

donc e^t est vp et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ associé

$$A(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t)-sh(t) \\ sh(t)-ch(t)\end{pmatrix} = (ch(t)-sh(t))\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

donc e^{-t} est vp et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ associé

On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $P \in O_2(\mathbb{R})$

$D(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

Alors $\underline{A(t) = P\, D(t)\, P^{T}}$ $\quad P^{T} = P^{-1}$ car $P \in O_2(\mathbb{R})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$(A(t))^{n} = P\,(D(t))^{n}\,P^{T}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{nt} & 0 \\ 0 & e^{-nt} \end{pmatrix} P^{T}$$

$$(A(t))^{n} = \begin{pmatrix} ch(nt) & sh(nt) \\ sh(nt) & ch(nt) \end{pmatrix}$$