Ex 62

(X_n) suite de va iid $\quad X_n \sim \mathcal{B}(p)$

$M = (X_i X_j)_{1 \leq j, i \leq n}$

1/

$$M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & & & \\ \vdots & & & \\ X_n^2 & & & X_n^2 \end{pmatrix} = \left[X_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \middle| \cdots \middle| X_n \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right]$$

- R : le rang de M $\quad R = rg(M)$

Les colonnes de M sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Donc $rg(M) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_1 = \cdots = X_n = 0 \\ 1 \text{ sinon car l'un des des } X_i \text{ est non nulle et } \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ est non nulle aussi} \end{cases}$

D'où : $P(R=0) = P(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0) = p^n$ car les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$

$P(R=1) = 1 - p^n$

Donc $R \sim \mathcal{B}(1-p^n)$

- $T = Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ car $X_i^2 = X_i$ car $X_i(\Omega) = \{0,1\}$

Or les (X_i) sont indépendants donc :

$T \sim \mathcal{B}(n, p)$

2/ M est la matrice d'un projecteur $\Leftrightarrow M^2 = M$.

Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$(M^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik} (M)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} X_i X_k X_k X_j$$

$$= X_i X_j \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = X_i X_j \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= (M)_{ij} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Donc $M^2 = M \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k = 1$

$\Leftrightarrow$ l'un des X_i vaut 1, les autres sont nuls.

Donc $M^2 = M \Leftrightarrow \bigsqcup_{k=1}^{n} (X_1 = 0, \ldots, X_k = 1, \ldots, X_n = 0)$

Donc par $\perp\!\!\!\perp$ des X_i :

$$P(M^2 = M) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{n-1} p$$

$$P(M^2 = M) = n p (1-p)^{n-1}$$

Ex 63

$X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$

I, S vp de M avec $I \leq S$

1/ $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - X & -Y \\ -Y & \lambda - X \end{vmatrix} = (\lambda - X)^2 - Y^2 = (\lambda - X - Y)(\lambda - X + Y)$

$Sp(M) = \{X+Y, X-Y\}$ d'où $I = X - Y$, $S = X + Y$ (car $Y \geq 0$)

2/ $P(M \text{ inversible}) = P(X^2 - Y^2 \neq 0)$

$P(M \text{ non inversible}) = P((X-Y)(X+Y) = 0)$

$= P(X-Y = 0 \text{ ou } X+Y = 0)$

$= P(X - Y = 0)$ car $X + Y > 0$ car X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$= P(X = Y)$

On utilise la formule des proba totales avec le SCE $(X = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$:

$P(M \text{ non inversible}) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j, Y = j)$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j) P(Y = j)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} p^2 ((1-p)^2)^{j-1}$

Or $|(1-p)^2| < 1$ donc

$P(M \text{ non inversible}) = p^2 \dfrac{1}{1 - (1-p)^2}$ somme géométrique

$P(M \text{ non inversible}) = \dfrac{p}{2-p}$ donc $P(M \text{ inversible}) = \dfrac{2-2p}{2-p}$

3/ $\mathrm{cov}(I, S) = E(IS) - E(I)E(S)$

$= E(X^2 - Y^2) - (E(X) - E(Y))(E(X) + E(Y))$

$= E(X^2) - E(Y^2) - ((E(X))^2 - E(Y)^2)$

$= V(X) - V(Y)$ (Koenig-Huyghens)

$\mathrm{cov}(I, S) = 0$ car $V(X) = V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$

- A-t-on : $\forall i, s$ $P(I = i, S = s) = P(I = i) P(S = s)$??

Notons que :

$(I = i, S = s) \Leftrightarrow (X - Y = i, X + Y = s)$

$\Leftrightarrow X = \frac{i+s}{2}$ et $Y = \frac{s-i}{2}$

Avec $i = 0, s = 3$: $(I = 0, S = 3) \Leftrightarrow (X = \frac{3}{2}, Y = \frac{3}{2})$ impossible.

Donc $P(I = 0, S = 3) = 0$

Or $P(I = 0) \neq 0$ et $P(S = 3) \neq 0$

car $(X = 1, Y = 1) \subset (I = 0)$

$(X = 1, Y = 2) \subset (S = 3)$

Donc I et S ne sont pas $\perp\!\!\!\perp$

E. Ex 65 Classique

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, sachant $(X=n)$, Y suit une loi binomiale de paramètres n, p.

. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

. Pour $k \in \mathbb{N}$, d'après la FPT avec le SCE $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$P(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(X=n)}(Y=k)\, P(X=n)$$

Or $P_{X=n}(Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \le n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

D'où:

$$P(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$j = n-k$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} (1-p)^j \lambda^{k+j}$$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} = \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda p}$$

Donc $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

Ex 66.

. $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

. Sachant $N=n$, S : nb de succès de la répétition $\perp$ de n épreuves de Bernoulli donc la loi conditionnelle de S est une loi binomiale de paramètres n, p. Et E le nb d'échecs une loi binomiale de paramètres $1-p, n$.

1/ Comme 65).

$S \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ $\qquad E \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$

2/ Soit $(s,e) \in \mathbb{N}^2$,

$$P(S=s, E=e) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P_{N=n}(S=s, E=e)}_{\text{sachant } N=n} P(N=n)$$ FPT avec le SCE $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$

. Pour $n \ge 1$: $S+E=n$ ~~donc on ne peut avoir $S=E=0$~~

~~D'où $P(S=0, E=0) = \underbrace{P_{N=0}(S=0, E=0)}_{=1} P(N=0)$~~ $= e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

Si $s+e \ne n$:

. $P_{N=n}(S=s, E=e) = 0$,

Donc $P(S=s, E=e) = \underbrace{P_{N=s+e}(S=s, E=e)}_{=1} P(N=s+e)$

$$= \frac{\lambda^{s+e}}{(s+e)!} e^{-\lambda}$$

Et $P(S=s)P(E=e) = \frac{(\lambda p)^s}{s!} \frac{((1-\lambda)p)^e}{e!} e^{-\lambda p}$

Ex 68 $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ $q = 1-p$

1/ La série $\sum_{n\geq 1} t^n P(X=n) = \sum_{n\geq 1} ((1-p)t)^{n-1} pt$

cv ssi $|(1-p)t| < 1$ càd $t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[= I$

$\forall t \in I, \quad G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

2/ -a- Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$(X+Y=k) = \bigsqcup_{i=1}^{k-1} (X+Y=k, X=i)$ car pour $i \geq k$ $X+Y > k$

D'où $P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X+Y=k, X=i)$

$= \sum_{i=1}^{k-1} P(Y=k-i, X=i)$

$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(Y=k-i) P(X=i)$ $(X \perp\!\!\!\perp Y)$

-b- $P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-i-1} p (1-p)^{i-1} p$

$= \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2$

$= (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$

3/ -a- $X \perp\!\!\!\perp Y$ donc $G_{X+Y} = G_X G_Y$

$\forall t \in I, \quad G_{X+Y}(t) = \frac{p^2 t^2}{(1-(1-p)t)^2} = p^2 t^2 (1-(1-p)t)^{-2}$

-b- $\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

Avec $\alpha = -2$, $x = -(1-p)t$

$(1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots\cdots(-1-n)}{n!} x^n$

D'où $G_{X+Y}(t) = p^2 t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (1-p)^n t^n$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(1-p)^n p^2 t^{n+2}$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{n-2} p^2 t^n$

D'où par unicité des coeff d'une série entière :

$\forall n \geq 2, \quad P(X+Y=n) = (n-1)(1-p)^{n-2} p^2$

4/ $X_1, \ldots, X_n$ sont iid suivant une loi géom de param p.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$:

$$G_{S_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}$$

d'où : $\forall t \in I$, $G_{S_n}(t) = \dfrac{p^n t^n}{(1-(1-p)t)^n}$

On utilise DSE de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -n$,

$$G_{S_n}(t) = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k (1-p)^k t^k$$

$$= p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} (1-p)^k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} (1-p)^k p^n t^{k+n}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} (1-p)^k p^n t^{k+n}$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n-1}{k-n} (1-p)^{k-n} p^n t^k$$

Par unicité des coeff de la série entière :

$$\forall k \geq n,\ P(S_n = k) = \binom{n-1}{k-n} (1-p)^{k-n} p^n$$