Daphnée Palligoix

Exercice préparé $\qquad f(x) = \frac{1}{\cos x}$

1) cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et ne s'y annule pas donc par inverse f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^4(x)} = \frac{1 - \sin^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3(x)}$$

$$f''(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

2) On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}_n[x] \ / \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)} \text{ "}$$

(I) $\mathcal{P}_0$ est vrai avec $P_0 = 1$ $\qquad f^{(0)}(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{P_0(\sin x)}{\cos x}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai. Alors au rang $n+1$,

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^{n+2} x \, P_n'(\sin x) + (n+1)\cos^n(x) \sin x \, P_n(\sin x)}{\cos^{2(n+1)}(x)}$$

$$= \frac{\cos^2 x \, P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x \, P_n(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 x)\, P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x \, P_n(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

$$= \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

où on a posé $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1) X P_n$

(C) Le résultat voulu est démontré

$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \ P_n' \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ donc } (1-x^2)P_n' \in \mathbb{R}_{n+1}[x] \\ \cdot \ X P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[x] \\ \quad \text{d'où } P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[x]. \end{array} \right.$

Rem : en posant a_n le coef devant X^n

On a : $a_{n+1} = -n a_n + (n+1) a_n = a_n$.

Et $a_0 = 1$ D'où : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1}$

3/ a. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$ $\underline{a_{n,n} = 1}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_{n,k} \geq 0$ ".

(I) $P_0 = 1$ $a_{0,0} = 1 \geq 0$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$P_{n+1} = (1-X^2) P_n' + (n+1) X P_n = P_n' - X^2 P_n' + (n+1) X P_n$$

$\underline{\forall k \geq 1}$
$$a_{n+1,k} = (k+1) a_{n,k+1} - (k-1) a_{n,k-1} + (n+1) a_{n,k-1}$$
$$= (k+1) a_{n,k+1} + \underbrace{[(n+1) - (k-1)]}_{\geq 0} a_{n,k-1} \geq 0$$

$\underline{k=0}$: $a_{n+1,0} = a_{n,1} \geq 0$.

(C) $\underline{\forall n, \forall k,\ a_{n,k} \geq 0}$.

Donc D'où $\forall x \in \underline{[0, \pi/2[}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$

Piste : . calcul de $P_n(1)$ $(n!)$

. P_n a même parité que n

Exercice non préparé

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

D'où $\ln(1+a_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underbrace{- \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV par application du CSSA car

  * $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ décroissante de limite nulle

  * $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$

- $b_n \sim -\frac{1}{2n}$

  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{2n} < 0$

  $\sum -\frac{1}{2n}$ DV (série harmonique)

  Donc par comparaison, $\sum b_n$ DV

  Par opérations, $\underline{\sum \ln(1+a_n) \text{ DV}}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$

- $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cv car la série $\sum a_k$ cv

- $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ DV et $b_k < 0$ apcr

  d'où $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = -\infty$

donc $S_n \longrightarrow -\infty$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)\right)$

donc $\prod_{k=0}^{n}(1+a_k) = e^{S_n} \longrightarrow 0$