Ex34

$n \in \mathbb{N}^*$

$P_n = n X^{n+2} - (n+2) X^{n+1} + (n+2) X - n$

- $P_n(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$
- $P'_n = n(n+2)X^{n+1} - (n+1)(n+2)X^{n} + n+2$

donc $P'_n(1) = n(n+2) - (n+1)(n+2) + n + 2 = 0$

- $P''_n = n(n+1)(n+2)X^{n} - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$

$P''_n(1) = 0$

Donc par caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées, 1 est racine au moins triple de P_n

Donc $\underline{(X-1)^3 \mid P_n}$

Ex35

Ex35

$$(S) \begin{cases} a+b+c = 4 \\ ab+bc+ac = 5 \\ abc = 2 \end{cases}$$

- Soit (a,b,c) solution de (S)

Posons $P = (X-a)(X-b)(X-c)$

$= X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$

$= X^3 - 4X^2 + 5X - 2$) 1 racine évidente

$= (X-1)(X^2 - 3X + 2)$

$= (X-1)^2(X-2)$

Donc $(a,b,c) = (1,1,2)$ ou $(1,2,1)$ ou $(2,1,1)$

- Réciproquement ces 3 triplets conviennent.
- Conclusion : $\mathcal{S}_{(S)} = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$

Ex en plus

$P = X^4+16$ Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

(M1) En factorisant

$$P = X^4 + 16 + 8X^2 - 8X^2$$
$$= (X^2+4)^2 - (2\sqrt{2}X)^2$$
$$= (X^2 - 2\sqrt{2}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 4)$$

Les discriminants de ces 2 trinômes valent -8, c'est donc la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Puis les racines de ces polynômes sont :

$$r_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\quad r_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\quad r_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},\quad r_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$: $P = 1(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)(X-r_4)$

(M2) Autres factorisations possibles

$$P = (X^2)^2 - (4i)^2 = (X^2 - 4i)(X^2 + 4i)$$

$$4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \qquad -4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

D'où $P = \left(X - 2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X + 2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X + 2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

On regroupe par paires de conjugués et on utilise

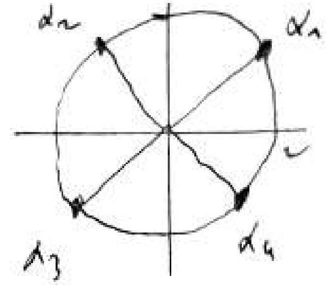
$$(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha+\bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

$$P = \left(X^2 - 2\mathrm{Re}(2e^{i\frac{\pi}{4}})X + |2e^{i\frac{\pi}{4}}|^2\right)\left(X^2 + 2\mathrm{Re}(2e^{i\frac{\pi}{4}})X + |2e^{i\frac{\pi}{4}}|^2\right)$$
$$= (X^2 - 2\sqrt{2}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 4)$$

(M3) On commence par déterminer les racines de P

Soit $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \iff z^4 = -16 = 16e^{i\pi}$

$$\iff z^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$$
$$\iff \left(\frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = 1$$
$$\iff \frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} \in \mathbb{U}_4 = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{4}} \,(k \in [\![0,3]\!])\right\}.$$
$$\iff z \in \{\underbrace{2e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\alpha_1}, \underbrace{2e^{3i\frac{\pi}{4}}}_{\alpha_2}, \underbrace{2e^{\frac{5i\pi}{4}}}_{\alpha_3}, \underbrace{2e^{\frac{7i\pi}{4}}}_{\alpha_4}\}$$



- Dans $\mathbb{C}[X]$: $P = 1(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_3)$
- Dans $\mathbb{R}[X]$ on regroupe par paire de conjugués comme dans la méthode 2 : $\bar{\alpha}_1 = \alpha_4$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_3$

$$P = (X^2 - 2\sqrt{2}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 4)$$