Ex 51

- $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \underbrace{x+y+z+t=0}_{(E_1)} \text{ et } \underbrace{x-y+z-t=0}_{(E_2)}\}$

$= F_1 \cap F_2$

où $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t=0\} = n_1^\perp$ où $n_1 = (1,1,1,1)$

$F_2 = \{ \text{—} \,/\, x-y+z-t=0\} = n_2^\perp$ où $n_2 = (1,-1,1,-1)$

- $n_1, n_2 \in F^\perp$

- dim $F = 2$, en effet :

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} x = -z & (E_1)+(E_2) \\ y = -t & (E_1)-(E_2) \end{cases} \}$

$= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (-1,0,1,0)$
$\varepsilon_2 = (0,-1,0,1)$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ libre car $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ non proportionnels

donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de F.

- donc $\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F$

$= 4 - 2 = 2$

- (n_1, n_2) libre car n_1, n_2 non prop

card$(n_1, n_2) = \dim F^\perp$

donc (n_1, n_2) est une base de $F^\perp$

De plus $n_1 \perp n_2$ car $(n_1 | n_2) = 0$

- On pose $e_1 = \frac{1}{2} n_1$, $e_2 = \frac{1}{2} n_2$

D'où $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une b.o.n de } F}$

Ex 52

1) C'est du cours !

2) Retenir aussi que $(A|B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, x + 1 & 3 \\ 4 & \mathrm{sh}\, x \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, x - 1 & 4 \\ -3 & -\mathrm{sh}\, x \end{pmatrix}$

Donc $(A|B) = (\mathrm{ch}\, x + 1)(\mathrm{ch}\, x - 1) + 12 - 12 - \mathrm{sh}^2 x$

$= \mathrm{ch}^2 x - 1 - \mathrm{sh}^2 x$

$\underline{(A|B) = 0}$

Ex[5]

- Forme : $P(X)$ est un polynôme, notons $n=\deg(PQ)$ et α son coef dominant :

$P(t)Q(t) \sim \alpha t^n$ donc $P(t)Q(t)e^{-t} \sim \alpha t^n e^{-t}$

Donc $t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} \alpha t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

donc $P(t)Q(t)e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$

Donc par comparaison $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ intégrable en $+\infty$

De plus $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ continue sur $[0,+\infty[$

Donc $(P|Q) \in \mathbb{R}$.

- Symétrie : par commutativité du produit de polynômes

- Bilinéarité : par distributivité du produit de polynômes sur l'addition et linéarité de l'intégrale

- Définie-positive : $t \longmapsto P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ et on intègre bornes $\nearrow$: $(P|Q) \geq 0$.

De plus $t \longmapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est continue donc par th de nullité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t}\,dt \Rightarrow \forall t \in [0,+\infty[,\ P(t)^2 e^{-t} = 0$$

$\Rightarrow \forall t \in [0,+\infty[,\ P(t) = 0$

$\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$: arité de racines

- $m = d^2(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ ⚠ Classique

$= \|X^3\|^2 - \|p_{\mathbb{R}_2(X)}(X^3)\|^2$

- On détermine une b.o.n de $\mathbb{R}_2(X)$.

- Notons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt}_{I_n} = n!$

car $I_{n+1} = (n+1)I_n$ par IPP.

- $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$\longrightarrow$ On pose $A_0 = \frac{1}{\|1\|} = 1$ $\quad \|1\| = \int_0^{+\infty} 1\, e^{-t}\,dt = 0!$

$\longrightarrow$ On pose $B_1 = X - (X|1)1$ $\quad (X|1) = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1!$

$= X - 1$

Puis $\|B_1\|^2 = \|X-1\|^2 = (X|X) - 2(X|1) + (1|1)$

$= 2! - 2\times 1 + 1 = 1$

On pose $A_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = X - 1$

→ On pose $B_2 = X^2 - (X^2|X-1)(X-1) - (X^2|1)1$

$(X^2|X-1) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$

$= 3! - 2! = 4$

$(X^2|1) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = 2$

$B_2 = X^2 - 4(X-1) - 2 = X^2 - 4X + 2$

On pose $A_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|}$

$\|B_2\|^2 = \|X^2 - 4X + 2\|^2$

$= \int_0^{+\infty} (t^2 - 4t + 2)^2 e^{-t}\,dt$

$= \int_0^{+\infty} (t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t + 4) e^{-t}\,dt$

$= 4! - 8\times 3! + 20\times 2 - 16 + 4$

$= 4$

Donc $A_2 = \frac{X^2 - 4X + 2}{2}$

• D'après l'expression du projeté orthogonal dans une base

on $P_{\mathbb{R}_2}(X^3) = (X^3|A_0)A_0 + (X^3|A_1)A_1 + (X^3|A_2)A_2$

et $\|P_{\mathbb{R}_2}(X^3)\|^2 = (X^3|A_0)^2 + (X^3|A_1)^2 + (X^3|A_2)^2$

. $(X^3|A_0) = (X^3|1) = 6$

. $(X^3|A_1) = (X^3|X) - (X^3|1) = 4! - 3! = 18$

. $(X^3|A_2) = \frac{1}{2}\left[(X^3|X^2) - 4(X^3|X) + 2(X^3|1)\right]$

$= \frac{1}{2}(5! - 4\times 4! + 2\times 3!)$

$= \frac{1}{2}(120 - 96 + 12)$

$= 18$

. $\|X^3\|^2 = 6! = 720$

D'où :

$m = 720 - 6^2 - 18^2 - 18^2$

$= 720 - 36 - 324 - 18^2$

$m = 36$

Ex 58

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Il existe D diagonale avec coeff réels et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq : $D = P^T A P$.

2) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \neq \mu$.
Soit $X \in E_\lambda(A)$, $Y \in E_\mu(A)$. Mq $X \perp Y$.

$AX = \lambda X \quad AY = \mu Y$

- $X^T A Y = \mu X^T Y$

Comme $X^T A Y$ est réel alors $(X^T A Y)^T = X^T A Y$

Or $(X^T A Y)^T = Y^T A^T X = Y^T A X = \lambda Y^T X$

Or $X^T Y = Y^T X$ donc en rapprochant ces égalités

$\mu X^T Y = \lambda X^T Y$ càd $X^T Y(\lambda - \mu) = 0$

Or $\lambda \neq \mu$ donc $X^T Y = 0$ càd $X \perp Y$

Donc $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$

3) u autoadjoint

- $Tr(u) = -3$
- u possède 2 vp
- 2 vp de u : $E_2(u) = Vect(v_1, v_2)$

dim $E_2(u) = 2$. Or dim $E_2(u) \leq m_2$: multiplicité de 2

Il y a 3 vp comptées avec multiplicité
donc $m_2 = 2$ et la vp manquante λ vérifie :

$Tr(u) = \lambda + 2 \times 2$. d'où $\lambda = -7$

D'où $Sp(u) = \{2, -7\}$

- $E_{-7} \perp E_2(u)$ et E_{-7} est de dimension 1 c
$m_{-7} = 1$

$v \in E_{-7} \iff (v|v_1) = (v|v_2) = 0$ $\quad v = (x, y, z)$

$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

D'où $E_{-7} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$