ALGÈBRE

Prenez le temps de consulter les fiches fournies par le concours Centrale Supelec concernant le calcul matriciel et la manipulation des polynômes. Nous utiliserons également, dans la feuille de probabilités, les commandes `randint` et `random` pour créer des matrices aléatoires. Importez donc les modules nécessaires, à savoir `numpy`, `munpy.linalg` et `numpy.random`.

Exercice 1. Calcul matriciel : étude d'une matrice orthogonale

Définissez la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifiez que A est orthogonale en calculant $A^\top A$, et calculer $\det(A)$. Quelle est la nature de l'endomorphisme associé à A ?
2. Calculer la valeur de A^{23}. Que remarque-t-on ?
3. Déterminez le spectre de A, et une base du sous-espace propre $E_1(A)$.

Exercice 2. Comparaison du spectre de matrices aléatoires

Soient n, p fixés, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et les matrices $G = M^\top M$ et $H = M\,M^\top$. On veut comparer les spectres de G et H

Écrivez une fonction `comp(n,p)` qui crée une matrice M aléatoire à coefficients dans $[\![-2, 2]\!]$, calcule les matrices G et H et renvoie leur spectre. Que peut-on conjecturer dans le cas $n = p$ dans le cas $n \neq p$?

Exercice 3. Manipulation de nombres complexes

Définir le nombre $z = 3 + 4i$ et calculer son module.

Écrire une fonction d'argument $k \in \mathbb{N}^*$, qui retourne $a_k = \Re\mathrm{e}(z^k)$ et $b_k = \Im\mathrm{m}(z^k)$.

Calculer pour différentes valeurs de k le reste de la division euclidienne de a_k et b_k par 5. Que peut-on conjecturer ?

En admettant le résultat conjecturé, montrer que $\frac{z}{|z|}$ n'est pas une racine n-ième de l'unité, quel que soit n.

Exercice 4. Lemme d'Hadamard

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes.

1. Écrivez une fonction `normecolonne(A,k)` qui retourne la norme de C_k.
2. Écrivez une fonction `diff` qui à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $|\det(A)| - \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$
3. Testez avec 100 matrices aléatoires à coefficients dans $[0, 1]$ (pour un certain $n \neq 1$).
4. Conjecturez le signe de cette différence.

Exercice 5. Réduction d'une matrice

Soit $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i, $a_{i,i} = 0$ et, pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = j$.

a. Écrivez une fonction `A(n)` renvoyant A_n.

b. Écrivez une fonction renvoyant les valeurs propres de A_n. Afficher A_n et ses valeurs propres pour n variant de 2 à 10. En déduire une conjecture sur A_n.

c. Montrez que les valeurs propres de A_n vérifient l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} = 1$.

Exercice 6. Déterminants

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $D_1(a,b) = a$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donnez une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a,b)$, $D_{n+1}(a,b)$ et $D_{n+2}(a,b)$.
2. Codez en Python une fonction `D(n,a,b)` renvoyant $D_n(a,b)$.
3. Pour $b \in [\![1,n]\!]$ et $n \in [\![3,5]\!]$, donnez une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a,b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturez le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$.
4. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?

MANIPULATION DE LA CLASSE Polynomial

La classe `Polynomial` permet de manipuler les polynômes, vus comme liste de leurs coefficients, sur lesquels on peut faire toutes les opérations usuelles (évaluation en un nombre, opérations algébriques, division euclidienne, dérivation...) et obtenir les informations nécessaires (degré, racines...)

Exercice 7. Manipulation de polynômes

Définissez par le type `Polynomial` les polynômes

$$P = X^5 - 3X^2 + 4X + 8, \quad Q = X^3 - 4X^2 + 2X + 3, \quad R = X^4 - 6X + 3.$$

a. Vérifiez la valeur de $P(2)$
b. Déterminez les racines de Q.
c. Tracez le graphe de la fonction polynomiale $\tilde{R}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
d. Déterminez le coefficient de X^3 dans le polynôme $(P + Q')R''$.
e. Déterminez le le reste de la division euclidienne du produit PQ par R.

Exercice 8. Produit scalaire sur un espace de polynômes

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Écrivez une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie la valeur de $\langle P, Q \rangle$. *Les polynômes seront du type* ***`Polynomial`****, et on pourra utiliser la commande* ***`integ`*** *qui détermine une primitive d'un polynôme*
2. Écrivez une fonction Python qui définit le polynôme $Q_n(X) = \dfrac{1}{2^n\, n!}\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$. Vérifiez qu'il est de degré n.
3. Vérifiez par quelques calculs que les polynômes Q_n forment une base orthogonale. Conjecturez la valeur de $\|Q_n\|^2$.
4. Tracer sur un même dessin les graphes de Q_k pour $k \in [\![1,5]\!]$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Constater que Q_k a k racines dans cet intervalle.
5. On admet les conjectures précédentes. Soit le polynôme $A = X^7 - 3X^4 + 6X^2 + 5X - 3$.
   a. Calculez le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_4[X]$.
   b. Calculez $\inf_{P \in \mathbb{R}_4[X]} \|A - P\|$.