

ANALYSE

Prenez le temps de consulter les fiches fournies par le concours Centrale Supélec concernant l'analyse numérique et les représentations graphiques.

Importez les modules nécessaires, principalement `numpy`, `matplotlib.pyplot` et les modules plus avancés `scipy.optimize`, `scipy.integrate` et la commande de graphe 3D.

Le plus important : tracer efficacement le graphe d'une fonction en Python.

- Définir la fonction comme une fonction classique `def f(t):` sans oublier `return`.
Le module `numpy` contient toutes les fonctions usuelles.
- Créer un tableau d'abscisses `Lt`.
La commande `np.linspace(a,b,n)` crée une liste de n points équidistants dans $[a, b]$.
- Créer la liste des ordonnées sous la forme `[f(t) for t in Lt]`.
Pour des fonctions simples, on a la syntaxe plus rapide `Lf=f(Lt)`, mais ne fonctionne pas pour des fonctions complexes, par exemple définies par une intégrale.
- La commande `plot` du module `matplotlib.pyplot` permet de tracer un graphe, avec pour syntaxe `plt.plot(Lt,Lf)` où `Lt` est la liste d'abscisses et `Lf` la liste d'ordonnées. On peut superposer plusieurs graphes, par exemple `plt.plot(Lt1,Lf,Lt2,Lg)`.
Même si les listes d'abscisses sont les mêmes, il faut la mettre à chaque fois.
On peut préciser des couleurs, par exemple `plt.plot(Lt,Lf,'r',Lt,Lg,'b')`.
- On a tout intérêt à rajouter la commande `plt.grid()` pour afficher un quadrillage.
Ne pas oublier `plt.show()` pour afficher le graphe.

Exercice 1. Fonctions d'une variable

- `plot` Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$.
- `fsolve` Donner une valeur approchée des coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes
- `quad` Donner une valeur approchée de l'aire de la surface triangulaire délimitée par ces deux courbes et l'axe des ordonnées.

Exercice 2. Une intégrale à paramètre

On pose $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta$.

Tracer avec Python le graphe de f sur $]0, 10]$, ainsi que celui de $x \mapsto 2\pi \ln(x)$. Émettre une conjecture.

Exercice 3. Une série entière

On pose $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$. On définit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Construire la liste $[a_0, a_1, \dots, a_{100}]$

Important : pour la factorielle, `from math import factorial`.

2. Définir f en l'approximant par $\sum_{n=0}^{100} a_n x^n$ et vérifier graphiquement que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{2}{1 + e^x}.$$

Exercice 4. Une suite d'intégrales

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.

- Écrire une fonction $I(n)$ qui renvoie la valeur de cette intégrale.
- Afficher les valeurs de $n \left(1 - \frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ pour plusieurs valeurs de n , conjecturer une relation entre I_{n+1} et I_n .
- Placer sur un graphe les points de coordonnées $((\ln(n), \ln(I_n)))$ pour $n \in \llbracket 3, 20 \rrbracket$.
- Conjecturer une valeur de α telle que $I(n)$ ait un équivalent de la forme $\frac{c}{n^\alpha}$.

Exercice 5. Une suite définie par une équation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit (E_n) l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1 = 0$$

Justifier que l'équation (E_n) admet une et une seule solution dans \mathbb{R}_+ . Cette solution est notée u_n .

- Ecrire une fonction $u(n)$ qui retourne u_n pour $n \geq 1$.
- Conjecturer le sens de variation et la limite ℓ de (u_n) .
- On pose $v_n = 2^n(u_n - \ell)$, conjecturer le comportement asymptotique de la suite (v_n) .

Exercice 6. Une série de fonctions

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $A_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$.

- Tracer sur un même graphe les courbes représentatives de A_n pour $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.
- Vérifier expérimentalement (mais pas forcément graphiquement) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt.$$

Exercice 7. Encore une suite d'intégrales

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1-t^n}} dt$.

- Tracer les termes de cette suite pour $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$. Conjecture ?
- On note ℓ la limite conjecturée.
Tracer les termes de la suite $(n^{3/2}(I_n - \ell))$ pour $n \in \llbracket 1, 500 \rrbracket$. Conjecture ?

Exercice 8. Une fonction définie par une intégrale

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
- Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 3]$. En considérant $\exp(f)$, conjecturer la limite de f en 1.

Exercice 9. Une suite de fonctions

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution $a_n \in \mathbb{R}_+$.
- b. Tracer sur une même figure a_n , n et $n+1$ pour $0 \leq n \leq 50$. Que peut-on conjecturer ?
- c. Tracer $3(a_n - n)$ pour $0 \leq n \leq 50$. Que peut-on conjecturer ?
2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $g_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$. Que vaut $g_n(0)$?
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, conjecturer graphiquement que $f_n = g_n$, et le justifier.

CAS DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ peut se représenter de deux manières :

- ▷ soit par un graphe en 3 dimensions où figurera la surface d'équation $z = f(x, y)$
- ▷ soit par un graphe en 2 dimensions représentant le domaine de définition de f , sur lequel sont tracées les lignes de niveau k , c'est-à-dire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = k\}$, pour différentes valeurs de k .

Attention, Pyzo pose parfois quelques soucis pour passer d'un graphe 2D à un graphe 3D... Il pourra être nécessaire de fermer le shell et d'en ouvrir un autre pour passer de la question a à la question b. dans l'exercice ci-dessous

Exercice 10. Fonctions de deux variables

On considère la fonction de deux variables

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 4(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 - 3y^2) - 27(x^2 + y^2 - 1)$$

- a. Représenter la surface d'équation $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$.
- b. En travaillant cette fois avec $(x, y) \in [-3, 3]^2$, tracer dans le plan plusieurs lignes de niveau $f(x, y) = k$, avec k positif, négatif ou nul

Exercice 11. Fonction de deux variables

On considère la fonction $K : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \sin(x) \cos(y) & \text{si } x \geq y \\ \cos(x) \sin(y) & \text{sinon} \end{cases}$

1. On note $\alpha(x, y) = \min(x, y)$ et $\beta(x, y) = \max(x, y)$. Exprimer $x + y - |x - y|$ en fonction de $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$. En déduire que α et β sont continues sur \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que K est continue sur \mathbb{R}^2 . En déduire l'existence d'un min m et d'un max M pour K sur $\mathcal{C} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.
4. Sur Python, tracer la surface $z = K(x, y)$ et conjecturer les valeurs de m et M .
5. Démontrer cette conjecture.