## PROBABILITÉS

Toutes les comandes considérées sont dans le module `numpy.random` que l'on importera sous le nom `rd`.

Nous avons déjà vu la commande `randint(a,b)`, qui donne un nombre aléatoire dans $[\![a, b-1]\!]$, autrement dit qui donne la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$. En rajoutant un argument `randint(a,b,n)` on obtient une liste de $n$ réalisations indépendantes de cette variable aléatoire, et `randint(a,b,(n,p))` donne une matrice de $n \times p$ réalisations.

De même, `random()`, `random(n)` et `random((n,p))` donnent respectivement, une réalisation, une liste de réalisations, une matrice de réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme continue sur $[0, 1[$ (qui ne rentre pas dans notre programme mais qui peut être pratique).

De la même manière, on peut simuler une loi binomiale, une loi géométrique, une loi de Poisson, et obtenir un résultat, une liste ou une matrice.

Une astuce pratique : `np.set_printoptions(precision=3)` limite le nombre de chiffres après la virgule affichés dans un `np.array` à 3 (par exemple), ce qui peut permettre de gagner en lisibilité.

### Exercice 1. Distribution d'une loi de Poisson

1. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 7

a. Créez une liste `R` de 1000 réalisations de cette variable aléatoire.

b. Créez une liste $[r_0, \ldots, r_{10}]$ où $r_k$ donne la proportion des éléments de `R` qui valent $k$.

c. Créez par ailleurs la liste $[p_0, \ldots, p_{10}]$ où $p_k = P(X = k)$.

d. Comparez les listes obtenues en b et c.

### Exercice 2. Simulation d'une loi de Rademacher, marche aléatoire

Soit $X$ une variable de Rademacher, c'est-à-dire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.

1. a. Montrez que $X = aU + b$ avec $U$ une variable suivant une loi de Bernoulli, pour des valeurs $a$ et $b$ à préciser.

b. Déduisez-en une fonction `rademacher(n)` qui simule $n$ répétitions indépendantes d'une variable aléatoire de Rademacher.

2. Soit $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ une suite indépendantes de variables de Rademacher, on pose $S_0 = 0$ et $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a. On voit chaque $X_i$ comme le déplacement d'une puce sur un axe ; à quoi correspond $S_k$ ?

b. Les points de coordonnées $(k, S_k)$ pour $k \in [\![0, 20]\!]$ permettent de visualiser le parcours de la puce. Affichez sur un même graphe trois parcours possibles de la puce.

3. Soit la variable aléatoire $T = \min\{k \geqslant 1 \,/\, S_k = 0\}$.

a. À quoi correspond cette variable aléatoire ?

b. Écrvez une fonction `simulT()` qui renvoie le résultat de cette variable aléatoire.

*Remarque :* comme on ne sait pas à l'avance combien de réalisations de la variable il faudra, il est conseillé d'utiliser `rademacher(1)` à l'intérieur d'une boucle `while`

c. Faites une moyenne de 100 réalisations de $T$. Que conjecture-t-on sur l'espérance de $T$ ?

**Exercice 3. Matrice aléatoire géométrique**

Soit $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{2}{3}$, on s'intéresse à la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

En calculant 1000 matrices de cette forme et en comptant le nombre de celles qui ne sont pas inversibles, estimez cette probabilité.

**Exercice 4. Longueur d'une suite croissante de variables géométriques**

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables géométriques indépendantes de paramètre $p \in ]0,1[$. Soit $q = 1 - p$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit

$$C(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\}.$$

Écrivez une fonction informatique `geomCr(q)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $C$, et estimez l'espérance de la variable aléatoire $C$.

Étudier le comportement obtenu lorsque $q$ est proche de 0, et lorsque $q$ est proche de 1.

**Exercice 5. Simulation d'une autre loi**

On considère une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

pour tout $n \geqslant 1$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ (notez que la somme vaut bien 1 !).

1. Soit $U$ une variable aléatoire correspondant au résultat de la fonction `random` (loi continue uniforme sur $]0,1]$). Justifiez que $P(X = n) = P\left(U \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]\right)$.

2. Écrivez une fonction `simulX()` qui simule la variable aléatoire $X$, c'est-à-dire renvoie un entier aléatoire en suivant la loi de $X$.

3. On considère $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{X} B_i$. Écrivez une fonction `simulX()` qui simule la variable aléatoire $Y$.

**Exercice 6. Processus de Galton-Watson**

Soit $X$ une variable aléatoire, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que $X$, et $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante des $X_n$. On note $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{T} X_k$, en convenant que cette somme est nulle si $T = 0$.

On suppose que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ et $T$ une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Écrivez une fonction `gw(p,lambda)` qui simule la variable aléatoire $Z$.

Calculez la moyenne de 1000 occurences de $Z$, et vérifiez expérimentalement le résultat $E(Z) = E(X)E(T)$.

**Exercice 7. Méthode de Monte Carlo**

Définissez aléatoirement un point $M(x, y)$ appartenant à $[0,1]^2$.

a. A quelle condition ce point se situe-t-il à l'intérieur du quart de disque unité ?

b. Quelle est la probabilité que ce point se situe à l'intérieur du quart de disque unité ?

c. Ecrivez une fonction `montecarlo(n)` qui choisit $n$ points et retourne quatre fois la proportion de points se situant à l'intérieur du quart de disque.

d. Affichez les points sur un graphe, en mettant en bleu ceux situés à l'intérieur et en rouge ceux situés à l'extérieur.