Ex 29

$f(u,v) = uv(1-u-v)$ sur $[0,1]^2$.

- $[0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.

  $[0,1]^2$ est fermé. En effet, soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]^2$ tq $(x_n,y_n) \longrightarrow (x,y)$

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq 1$, $0 \leq y_n \leq 1$

  On fait tendre : $x_n \to x$, $y_n \to y$,

  par passage à la limite : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

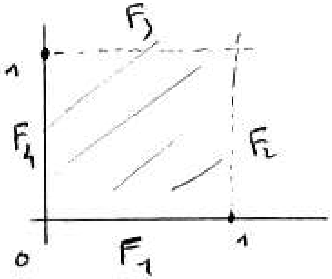
  D'où $(x,y) \in [0,1]^2$

- $[0,1]^2$ est borné
- Or f est polynomiale donc continue sur $[0,1]^2$
- Donc f admet un maximum et un minimum sur $[0,1]^2$

- Sur $]0,1[^2$ (l'intérieur de $[0,1]^2$)

  f est $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert

  les extrema sur $]0,1[^2$ sont parmi les points critiques



$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = v - 2uv - v^2$

$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = u - u^2 - 2uv$

$$\nabla f(u,v) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} v(1-2u-v) = 0 \\ u(1-u-2v) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2u+v=1 \\ u+2v=1 \end{cases}$$

$0 < u < 1$

$0 < v < 1$

$$\iff \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- f $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) = -2v \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = -2u \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 - 2u - 2v$

Donc $H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

> Mieux: $\det = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$
> Trace $= -\frac{4}{3} < 0$
> donc les 2vp sont < 0

$\chi_H = X^2 + \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} = (X+1)\left(X+\frac{1}{3}\right)$ donc $Sp(H) = \left\{-\frac{1}{3}, -1\right\}$

$Sp(H) \subset \mathbb{R}_-^*$ donc f admet un max local en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Et $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

- Sur F_1 : $v=0$ $f(u,0) = 0$ Sur F_2 : $u=0$ $f(0,v)=0$
- Sur F_3 : $v=1$ $f(u,1) = -u^2$: min -1 si $(u,v) = (1,1)$
  max 0 si $(u,v) = (0,1)$
- Sur F_4 : idem

Bilan:

$$\boxed{\min_{[0,1]^2} f = -1 \text{ en } (1,1) \qquad \max_{[0,1]^2} f = \frac{1}{27} \text{ en } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$$

Ex30

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

1/ f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y\ ,\ 3y^2 - 3x)$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y(1-y^3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^3 = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

D'où $(0,0)$ et $(1,1)$ sont les deux points critiques

2/ • f $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc les extrema sont parmi les points critiques

• f $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ on utilise la hessienne

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

• $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H_f(0,0) = -9 < 0$

Les 2 vp sont de signe contraire

donc f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$

• $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det H_f(1,1) = 27 > 0$: les 2 vp sont de même signe.

$\operatorname{Tr} H_f(1,1) = 12 > 0$: elles sont > 0

Donc f admet un minimum local en $(1,1)$.

3/ • $f(1,1) = -1$

• $f(-2,0) = -8 < f(1,1)$

Donc pas d'extremum global.

Ex 31

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

1/ g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$

f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par opérations, et pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} g'(\frac{y}{x}) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x})$$

Donc $x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. donc ~~f solution de~~ $\underline{f \in \mathcal{E}}$

2/ -a- $f \in \mathcal{E}$, $v \in \mathbb{R}$ $\quad \Phi : t \mapsto f(t, vt)$

Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Phi'(t) = 1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, vt) + v \frac{\partial f}{\partial y}(t, vt)$$
$$= t \left[t \frac{\partial f}{\partial x}(t,vt) + tv \frac{\partial f}{\partial y}(t,vt) \right]$$
$$= 0$$

Donc $\underline{\Phi \text{ constante sur } \mathbb{R}_+^*}$

-b- f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftarrow$ Question 1)

$\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{E}$. On poursuit 2/-a-.

Φ constante pour tout donc il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(t) = g(v)$

Comme Φ $\mathcal{C}^1$ alors g aussi.

Donc : $\forall v \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t, vt) = g(v)$

En posant $t = x \in \mathbb{R}_+^*$, $v = \frac{y}{x}$,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x,y) = g(\frac{y}{x}).$$

D'où l'équivalence voulue

3/ $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$

-a- Qu'elle est prolongeable par continuité en 0 car

$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc F est une primitive de la fonction prolongée

d'où F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

-b- Soit $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, $h(x,y) = F(x^2+y^2)$

h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, F et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x F'(x^2+y^2) = 2x \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2y F'(x^2+y^2) = 2y \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

D'où : $\underline{x \frac{\partial h}{\partial x} + y \frac{\partial h}{\partial y} = 2 \sin(x^2+y^2)}$ (*)

- c - $f_0 = \frac{h}{2}$ est solution de : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2y^2)$ (E)

en divisant (*) par 2.

D'où : (E) $\Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f_0}{\partial x} + y\frac{\partial f_0}{\partial y}$

$\Leftrightarrow x\frac{\partial (f-f_0)}{\partial x} + y\frac{\partial (f-f_0)}{\partial y} = 0$

$\Leftrightarrow f - f_0 \in \mathcal{E}$

$\Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \;/\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}, f(x,y) = f_0(x,y) + g\left(\frac{y}{x}\right)$

D'où $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \frac{h(x,y)}{2} + g\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \;/\; g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \right\}}$