

Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée.

Exercice 1. Échelle de comparaison classique en $+\infty$: constantes $\ll (\ln n)^k \ll n^a \ll b^n \ll n!$.

- 1) $(\ln n)^2 \ll (\ln n)^4 \ll \sqrt{n} \ll n^5 \ll 4^n \ll 9^n \ll n!$
- 2) Même principe terme à terme ($\log < \text{puissance} < \text{exponentielle} < \text{factorielle}$) : repérer pour chaque terme sa catégorie dominante et classer en conséquence.

Exercice 2. Limites, via équivalents ou développements limités.

- 1) $\rightarrow 0$ avec l'équivalent $\sim \frac{2n^2}{n!}$
- 2) $\rightarrow 3$ (numérateur $\sim \frac{3}{n}$, dénominateur $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$)
- 3) $\rightarrow 0$, équivalent $\frac{1}{3n^2}$
- 4) e^α
- 5) limite $n^{\alpha-1}$: 0 si $\alpha < 1$, 1 si $\alpha = 1$, $+\infty$ si $\alpha > 1$
- 6) 1 si $a > b$, -1 si $a < b$, 0 si $a = b$
- 7) $e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$
- 8) $e^{1/e}$
- 9) -1 (DL à l'ordre 3 numérateur et dénominateur)
- 10) $-3/2$ (DL à l'ordre 3)

Exercice 3. Équivalents simples.

- 1) $\sim 3^n$
- 2) $\sim n$
- 3) $\sim \frac{\ln n}{n}$
- 4) $\sim -n$
- 5) $\sim \frac{1}{n}$
- 6) $\sim \frac{4}{n^2}$
- 7) $\sim \frac{e}{2n}$
- 8) $\sim -\frac{1}{6n^3}$

Exercice 4. Nature des suites récurrentes.

- 1) $u_0 = 1$, croissante ($u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$), diverge vers $+\infty$.
- 2) Converge vers 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n^2}$. Discussion selon $u_0 < 1, = 1, > 1$.

- 3) Points fixes : $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$.
 Intervalles stables intéressants de $f : [0, 2[,]2, 4[,]4, +\infty[$.
 Si $0 < u_0 < 4$: converge vers 2 ; si $u_0 = 4$: constante ; si $u_0 > 4$: diverge vers $+\infty$.

Exercice 5. On souhaite calculer $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$.

On pose $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

- 1) Récurrence.
- 2) Point fixe de f : $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, via $l^2 = 1 + l$.
- 3) Inégalité des accroissements finis sur f (occasion de réviser) en prouvant que $|f'| \leq \frac{1}{2}$. Ou bien utiliser la quantité conjuguée.
- 4) Choisir judicieusement x et y . Puis récurrence.
- 5) $u_n \rightarrow l$ via théorème d'encadrement.

Exercice 6. $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

- 1) On applique scrupuleusement le théorème de la bijection monotone à f_n sur $\mathbb{R}_+$.
- 2) Faire apparaître $f_{n+1}(u_{n+1})$ (qui vaut 0) dans $f_n(u_{n+1})$ pour montrer $f_n(u_{n+1}) < 0$. Donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$, et comme f_n est strictement croissante alors $u_{n+1} < u_n$.
- 3) (u_n) est décroissante minorée donc converge. On note l la limite.
 Passez à la limite $x_n^5 + nx_n + 1 = 0$ en distinguant deux cas $l > 0$ et $l = 0$.
 (u_n) converge vers 0.
- 4) Isoler u_n dans la relation $f_n(u_n) = 0$ pour trouver $u_n \sim \frac{1}{n}$.
- 5) $u_n - a_n \sim -\frac{1}{n^6}$.

Convergence et calculs de sommes

Exercice 7. Convergence et somme des séries proposées.

- 1a) $-8/175$
- 1b) $45/28$
- 2a) $e^4/8$
- 2b) $(e^5 - 6)/25$
- 3a) Diverge, série télescopique (terme = $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$).
- 3b) $\ln 2$ (factoriser $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, télescopage).
- 4) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ (parties réelle/imaginaire de $\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$).

Exercice 8. $x \in]0, \pi/2[, \sum \ln \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \text{ donc } \cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2 \sin(a)} \text{ à utiliser avec } a = \frac{x}{2^n} \text{ pour prouver } \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}.$$

Somme de la série : $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Exercice 9. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Calculer un DA de u_n , $u_n = (1 + a + b)\sqrt{n} + (a + 2b)\frac{1}{\sqrt{n}} - (a/8 + b/2)\frac{1}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Conditions de CV : $1 + a + b = 0$ et $a + 2b = 0 \Rightarrow (a, b) = (-2, 1)$.
Alors $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ est une différence seconde qui télescope : somme = -1.

Exercice 10.

Séparer pairs/impairs dans la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^2}$. La somme cherchée est $\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 11. Convergence des séries de terme général donné.

Cf. correction en TD.

Convergent : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Divergent : 2, 11 (car $e - (1 + \frac{1}{n})^n \sim \frac{e}{2n}$, comparaison à la série harmonique).

Exercice 12. $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k^2)$. Se ramène alors à l'étude de la convergence de la série.

Avec un équivalent la série converge. (u_n) converge vers une limite finie non nulle.

Exercice 13. $u_n = \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$, discussion selon $a \in \mathbb{R}$.

Converge ssi $|a| \neq 1$ (pour $|a| < 1$: $u_n \sim a^n$; pour $|a| > 1$: $u_n \sim a^{-n}$; pour $|a| = 1$: terme général ne tend pas vers 0).

Exercice 14. Séries à termes positifs et carrés.

- 1) $u_n \rightarrow 0$ donc à partir d'un rang $u_n \leq 1$, $u_n^2 \leq u_n$: comparaison.
- 2) Faux en général : contre-exemple $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.
- 3) $\ln(1 + u_n) = u_n - u_n^2/2 + o(u_n^2)$, converge par comparaison aux deux séries données.

Exercice 15. $\sum u_n$ CVP, montrer $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Inégalité $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ avec $x = \sqrt{u_n}$, $y = 1/n$. Réciproque fausse : contre-exemple $u_n = 1/n$ ($\sum u_n$ diverge mais $\sum \sqrt{u_n}/n = \sum n^{-3/2}$ converge).

Exercice 16. Comparaison série-intégrale (résultats donnés dans l'énoncé).

Fait en cours, à savoir refaire. Utiliser l'encadrement classique : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Séries alternées

Exercice 17. $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- 1) CSSA
- 2) Ecrire $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, puis linéarité de l'intégrale, reconnaître une somme géométrique de raison $-t \neq 1$.
- 3) On montrer que $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \rightarrow 0$. La somme de la série vaut $\ln(2)$.
1) Critère des séries alternées. 3) Somme = $\ln 2$.

Exercice 18. Convergence absolue et convergence.

- 1) CV par CSSA. Pas d'ACV ($|u_n| \sim 1/n$ diverge).
- 2) DV grossièrement.
- 3) CV par CSSA, la décroissance de $(\frac{\ln(n)}{n})$ se prouve avec une étude de fonction. Pas d'ACV.

4) ACV donc CV.

5) CV à l'aide du DA : $u_n = (-1)^n/n - 1/(2n^2) + o(1/n^2)$. Pas d'ACV.

6) Pas définie si $\alpha \leq 0$ car le radicande est < 0 ou nul.

Utiliser un DA : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{3\alpha/2}} + o(\frac{1}{n^{3\alpha/2}})$.

DV si $0 < \alpha \leq 2/3$; CV mais pas ACV si $2/3 < \alpha \leq 2$; absolument convergente si $\alpha > 2$. Utiliser un DA

7) On commence par factoriser $\sqrt{1+n^2}$ par n pour obtenir le DA : $u_n = (-1)^n \pi/(2n) + O(\frac{1}{n^2})$.
D'où la CV mais pas l'ACV.

Exercice 19. Domaines de définition de f et g .

$\mathcal{D}_f = [-1, 1[$. DVG si $|x| > 1$, série harmonique si $x = 1$, CSSA si $x = -1$, ACV si $|x| < 1$ à l'aide de $\frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$.
 $\mathcal{D}_g =]0, +\infty[$. Radicande négatif si $x < 0$ pour n assez grand, DVG si $x = 0$, équivalent à un terme général de Riemann si $x > 0$.

Exercice 20. Constante d'Euler, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Fait en cours

1) $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

2) Convergence de la série télescopique donc (u_n) CV.

3) On pose S_n la somme partielle d'indice n de la série. On somme par paquets d'indice pair/impair la somme S_{2n} , pour prouver $S_{2n} = H_{2n} - H_n$. On remplace alors H_{2n} et H_n par le DA de 2). On obtient la somme $\ln(2)$.

Exercice 21. Formule de Stirling.

1) Calcul.

2) On continue le calcul de 1) : $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O(\frac{1}{n^2})$.

3) La série télescopique converge donc la suite $\ln(v_n)$ converge et donc (v_n) aussi.

Exercice 22. $u_0 \in]0, \pi[$, $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.

1) Etude de fonction $x \mapsto \sin(x) - x$.

2) Prendre x convenable dans 1) pour prouver que (u_n) décroît. De plus minorée, elle CV. L'étude de fonction de 1), montre que l'unique point fixe de f est 0.

3) On pose $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$. Par un DA utilisant les DL de $\sin$ et $\ln(1 = u)$: $v_n \sim -u_n^2/24$.
D'après 1) : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$. Donc $\sum v_n$ CV.

3) Utiliser 2) et un télescopage.

Exercice 23. $z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum \binom{n}{p} z^n$.

1) Converge ssi $|z| < 1$ en utilisant la règle de d'Alembert pour $|z| \neq 1$ et la DV grossière si $|z| = 1$.

2) $S_{p+1}(z) = zS_{p+1}(z) + zS_p(z)$. D'où la relation de récurrence $S_{p+1}(z) = \frac{z}{1-z} S_p(z)$ que l'on itère.
 $S_p(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{p+1}}$.

Exercice 24. $u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$.

1) On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle dans u_n , $u_n \sim 2\eta e^4$.

- 2) On reconnaît $u_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ où $a_n = 2^n$ et $b_n = \frac{4^n}{n!}$. La somme de la série $\sum u_n$ est $2e^4$.

Exercice 25. Identité intégrale et applications.

- 1) La première égalité découle d'un changement de variable.
Puis utiliser la formule de binôme pour l'intégrale de gauche, et l'identité de Bernoulli $1 - u^n = (1 - u)(\dots)$ pour le membre de droite.
- 2) Reconnaitre un produit de Cauchy. On reconnaît $\frac{H_n}{n!}$ comme la somme $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{nn!}$.

Exercice 26. $x = e^{-x}$, solution α .

- 1) On pose $f(x) = x - e^{-x}$. On montre que $f(x) = 0$ admet une unique solution à l'aide du théorème de la bijection monotone appliqué à f .
- 2) On montre que $[e^{-1}, 1]$ est stable par f .
On montre que f est lipschitzienne à l'aide de l'inégalité des accroissements finis en prouvant que $|f'|$ est bornée. Prendre x et y judicieusement, dans l'inégalité des accroissements finis.
Itérer la relation de récurrence pour prouver $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
Le théorème des gendarmes montrer que $u_n \rightarrow \alpha$.

Exercice 27. Convergence des séries de terme général donné.

- 1) CV : $u_n = \frac{1}{n^2} ((\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}})$.
- 2) DV : $u_n \sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}}$.
- 3) DV : $u_n \sim \frac{1}{6n}$.
- 4) CV : $u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$.
- 5) DV : $u_n \sim 1/n$.
- 6) Si $x < 0$: DVG. Si $x = 0$: CV ssi $\alpha > 1$. Si $x > 0$: CV en comparant avec $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 28. Développement asymptotique de H_n .

- 1) On pose S_n la somme partielle d'indice n de la série. On somme par paquets d'indice pair/impair la somme S_{2n} , pour prouver $S_{2n} = H_{2n} - H_n$. On remplace alors H_{2n} et H_n par le DA de 2). On obtient la somme $\ln(2)$.
- 2) On pose $T_n = \sum_{k=0}^n$ la somme partielle d'indice n de la série.
 $T_n = H_{4n+3} - \frac{1}{2}H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_{n+1}$. Converge, somme = $\frac{3}{2} \ln 2$.

Exercice 29. Réarrangement d'une SATP convergente.

- 1) On fixe σ . On pose N la plus grande valeur prise par σ sur $\llbracket 0, N \rrbracket$. Alors comme les termes de la somme sont positifs $\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^N$.
- 2) On utilise 1) et la CNS de CV des SATP.
- 3) Il faut prouver l'inégalité manquante. On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$ donc $v_{\sigma^{-1}(n)} = u_n$. On utilise ce qui précède avec σ^{-1} au lieu de σ .

Exercice 30. $u_0 \in]0, \pi/2[, u_{n+1} = u_n \cos u_n$.

- 1) (u_n) décroît et positive donc CV.
 (u_n) est à valeurs dans $[0, \pi/2]$. La limite est l'unique point fixe de $f : x \mapsto x \cos(x)$ appartenant à $[0, \pi/2]$.
- 2) CV par CSSA.
- 3) $\sum \ln(\cos(u_n))$ DV : série télescopique avec $\ln(u_n)$ divergente.
 $\sum u_n^2$ DV : $\ln(\cos(u_n)) \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
 $\sum u_n$ DV : par l'absurde dans le cas contraire on aurait alors $\sum u_n^2$ CV.

Exercice 31. $a_n \in [0, 1], a_n^n = \cos a_n$.

- 1) On applique le théorème de la bijection monotone à $f : x \mapsto x^n - \cos x$ sur $[0, 1]$.
- 2) Montrer que $f_{n+1}(a_n) < 0$ pour prouver que (a_n) est croissante.
Majorée par 1, elle CV, on note l la limite.
- 3) $l \in [0, 1]$. Par l'absurde, on suppose $l \neq 1$. Dédurre que $a_n^n \rightarrow 0$ puis une absurdité à l'aide de $a_n^n = \cos a_n$.
 $\varepsilon_n = 1 - a_n \sim -\frac{\ln(\cos 1)}{n}$.

Exercice 32. $a > 0, u_n = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^n (a+k)}$.

- 1) Si $a = 1, u_n = 1 \rightarrow 1$.
Si $a \neq 1$. On écrit $(n+1)! = \prod_{k=1}^n (k+1)$ donc $\ln(u_n) = \sum \ln\left(1 + \frac{1-a}{k+a}\right)$.
On reconnaît une somme partielle de série donc le terme général $\ln\left(1 + \frac{1-a}{n+a}\right)$ est équivalent à $\frac{1-a}{n+a} \sim \frac{1-a}{n}$ TG d'une série DV.
Si $a < 1$, c'est une SATP, la suite des sommes partielles et donc $\ln(u_n)$ tend vers $+\infty$ donc u_n aussi.
Si $a > 1$, c'est une SATN, la suite des sommes partielles et donc $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$ donc $u_n \rightarrow 0$.
- 2) $u_n - u_{n-1} = (1-a)v_n$. Si $a \neq 1, v_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{1-a}$; on reconnaît une série télescopique, elle CV ssi (u_n) CV c'est-à-dire $a > 1$.
Si $a = 1, v_n = \frac{1}{n+1}$ donc la série DV.