

Intégrales sur un segment

Exercice 1. (♡♡) On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{n+x} dx$. Déterminer la limite de I_n . Déterminer un équivalent de I_n . [On se souviendra que pour déterminer un équivalent, on peut tenter d'encadrer par deux suites qui admettent un équivalent commun.]

Exercice 2. (**) mais un grand classique...(vu au DM1)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
[On pourra commencer par une intégration par parties].

Exercice 3. (♡♡) Déterminer les limites suivantes:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 4. (♡) Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n} & 3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} & 5) (\heartsuit) \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2} \\ 2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n + 2k} & 4) (\heartsuit) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^3} \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{n + k^2}{n^3 + k^3} & 6) (*) u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

Exercice 5. (*) En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Exercice 6. (♡♡) On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Étudier la parité de f , puis son signe.
- 2) Calculer la limite de f en 0.
- 3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7. (*) Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- 1) Démontrer que f est définie sur $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ; étudier les variations de f .
- 3) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 4) Montrer que $\phi : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- 5) En déduire la limite de f en 1.
- 6) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Intégrales généralisées

Exercice 8. (♡) Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur

$$\begin{array}{llll} 1) \int_0^{+\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 4} dx & 3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx & 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx & 7) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ 2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx & 4) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx & 6) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx & 8) \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \end{array}$$

Exercice 9. (♡♡) Étudier en fonction du réel α la convergence de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x} dx$.

Exercice 10. (*)

- 1) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$ converge et la calculer.
- 2) Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Exercice 11. (♡) À l'aide d'une intégration par parties montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer.

$$\begin{array}{lll} 1) I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt & 2) J = \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt & 3) (\heartsuit\heartsuit) K = \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \end{array}$$

Exercice 12. (♡) À l'aide du changement de variable indiqué, montrer que l'intégrale est convergente et la calculer.

$$\begin{array}{ll} 1) I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(3-t)(t-1)}} dt \text{ avec } x = t + 2. & 2) I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \text{ avec } x = \frac{1}{t}. \end{array}$$

Exercice 13. (*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 14. (*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \tan(t)$ montrer que I_n converge.
- 2) Montrer que la suite (I_n) converge.
- 3) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
- 4) En étudiant la suite $(\ln(I_n))$ déterminer la limite de (I_n) .
- 5) Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n I_n$.
- 6) Déterminer une expression de I_n en fonction de n .

Exercice 15. (*) Comparaison série-intégrale Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante à valeurs positives sur $[N; +\infty[$.

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_N^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.
2. Pour $n \geq N + 1$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge

Suppléments 5/2

Exercice 16. (*)

- 1) Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$.
- 2) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
- 3) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{k+n}\right)$.
- 4) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 17. (*) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} \quad u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 18. (**) Soit $a > 1$.

- 1) Montrer que $\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos(x) + a^2) dx$ existe.
- 2) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) X + 1$.
- 3) En déduire que $X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) X + 1 \right)$.
- 4) En déduire la valeur de $\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos(x) + a^2) dx$.

Exercice 19. (*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

- 1) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t) dt = K$. Montrer que f est T -périodique.
- 2) Montrer la réciproque.
- 3) On suppose que f est T -périodique et d'intégrale nulle sur une période. Montrer que F , une primitive de f , est T -périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique?

Exercice 20. (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

- 1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$ [Indication : faire un dessin].
- 2) En déduire que $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 21. (*) On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 1) Montrer que l'intégrale I converge. [Méthode classique où vous pouvez utiliser les résultats du chapitre "intégrabilité"]
- 2) Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$; En déduire le signe de I .

Exercice 22. (**) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux décroissante. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

- 1) Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
- 2) Démontrer que $tf(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
- 3) Démontrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t(f(t) - f(t+1))dt$ converge et la calculer.

Exercice 23. (*) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- 1) Justifier l'existence de $I = \int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$. On note I sa valeur.
- 2) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)^2}$ [on pourra remarquer que $1 = k + 1 - k$].
- 3) En déduire I .

Exercice 24. (*)

- 1) A l'aide d'une minoration, déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ diverge.
- 2) Pour tout entier $n \geq 0$, justifier l'existence d'un unique réel $x > 0$ tel que $\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt = n$. On notera u_n ce réel.
- 3) Montrer que la suite (u_n) est monotone convergente. Déterminer sa limite.
- 4) Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$.
- 5) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \ln u_n) = I$.
- 6) En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.