

Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée.

Exercice 1

Résultats : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Indications :

- Pour la limite : encadrer $0 \leq \sin x \leq 1$ suffira.
- Pour l'équivalent : utiliser l'encadrement $n \leq n+x \leq n+\pi$ sur $[0, \pi]$ pour obtenir deux intégrales calculables simplifiant l'expression de I_n , puis appliquer le théorème des gendarmes version équivalents.

Exercice 2 - Lemme de Riemann Lebesgue

Effectuer une intégration par parties en dérivant $t \mapsto f(t)$ et en intégrant $t \mapsto \cos(nt)$. Montrer que chacun des trois termes obtenus sont de limite nulle en les majorants en valeur absolue.

Pour le premier issu du crochet : $\left| \frac{\sin(na)f(a)}{n} \right| \leq \frac{|f(a)|}{n}$.

Pour le troisième terme, l'intégrale : majorer en valeur absolue.

Exercice 3

Résultats :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = 0$.

Indications :

1. Encadrer $\ln t$ sur $[x, 2x]$ pour minorer l'intégrale par une quantité de limite $+\infty + \infty$.
2. En $+\infty$, faire une intégration par parties en dérivant $\sin$ et intégrant $t \mapsto \frac{1}{t}$. On montre que les trois termes tendent vers 0 en les majorant en valeur absolue. Ressemble à ce qui est fait dans l'exercice 2.

En 0, prolonger par continuité l'intégrande en 0 en une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{2x} g(t) dt = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer la limite.

En 0, on peut aussi partir de $x \leq t \leq 2x$ et encadrer l'intégrande. Bien justifier la composition par $\sin$ car cette inégalité car $\sin$ n'est croissante qu'au voisinage de 0.

Exercice 4

Résultats : 2. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ 3. $2(\sqrt{3} - 1)$ 4. $\frac{1}{3} \ln 2$ et 5. $\frac{1}{2} \ln 5$ 6. $\frac{4}{e}$

1. $\frac{1}{2}$

Indications :

- Questions 1 à 3 : Reconnaître des sommes de Riemann sous la forme $\frac{1}{n} \sum f\left(\frac{k}{n}\right)$.
- 4) : la première comme 1), 2, 3). Ecrire la deuxième comme la somme de première et d'une deuxième et faire apparaître une somme de Riemann. Ecrire $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{n}$. C'est alors le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite convergente.
- 5) : poser $N = 2n$ et reconnaître une somme de Riemann en N .
Ou découper la somme en deux, de 1 à n puis $n+1$ à $2n$ et effectuer un changement d'indice sur la deuxième.
- Question 6 : Prendre le logarithme de u_n , faire apparaître une somme de Riemann pour $\ln(u_n)$ avec la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, puis composer la limite par l'exponentielle.

Exercice 5

Résultat : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}$.

Indication : Factoriser par $n\sqrt{n} = n^{3/2}$ pour faire apparaître la somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$, puis calculer l'intégrale correspondante.

Exercice 6

Résultats :

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. f est impaire et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
3. $f'(x) = \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x}$.

Indications :

1. Méthode classique. Etudier la continuité de l'intégrande, mettre en évidence des intervalles où elle est continue. Utiliser le changement de variable $u = -t$ pour la parité. Et l'intégration bornes croissantes d'une fonction positive pour le signe.
2. Prolonger par continuité l'intégrande en 0 en une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, $\int_x^{2x} \frac{\text{sh } t}{t} dt = \int_x^{2x} g(t) dt = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer la limite.
On peut aussi partir de $x \leq t \leq 2x$ et encadrer l'intégrande pour encadrer l'intégrale.
3. Ecrire $f(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de g sur chaque intervalle.

Exercice 7

Résultats :

1. $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. f est strictement croissante sur D .
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. $\phi(1) = \frac{1}{2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$.
6. Prolongement $\mathcal{C}^1$ garanti par la limite de la dérivée en 1 ($\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$).

Indications :

1. Etudier la continuité de l'intégrande $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$. Puis s'assurer que x et x^2 appartiennent tous les deux $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
2. Ecrire $f(x) = G(x^2) - G(x)$ où G est une primitive de g sur chaque intervalle.
3. Dans les deux cas, encadrer l'intégrale en commençant par encadrer l'intégrande et en commençant. Il faut faire attention au fait que $x \leq x^2$ si $x > 1$ mais en revanche $x \geq x^2$ si $0 < x < 1$.
4. Effectuer un développement limité de $\ln(1 + u)$ en $u = 0$ (avec $t = 1 + u$).
5. Décomposer $f(x) = \int_x^{x^2} \phi(t) dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$.
On écrit la première intégrale $\Phi(x^2) - \Phi(x)$ où Φ est une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on calcule la limite en 1 en utilisant que Φ est continue en 1.
On calcule la deuxième intégrale.
6. On utilise l'expression ci-dessus, c'est la somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8

Résultat et indications :

1. Divergente. Forme $\frac{u'}{u}$.
2. $\frac{1}{2}$. Forme $\frac{u'}{u^2}$.
3. $\ln(\frac{3}{2})$. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.
4. $\frac{1}{2} \ln(\frac{4}{3})$. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
5. π . On reconnaît Arctan.
6. $\frac{\pi}{8}$. Mettre le trinôme sous forme canonique : $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$.
7. π . On reconnaît Arctan.
8. 0. Forme $u' u^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 9

Résultat : Convergence si et seulement si $\alpha < -1$. Pour $\alpha < -1$, la valeur est $-\frac{1}{\alpha+1}$.

Indication : Effectuer le changement de variable $u = \ln x$ pour se ramener à une intégrale de Riemann standard en $+\infty$. Ou bien reconnaître la forme : $u' u^\alpha$.

Exercice 10

Résultats : 1) $I = \frac{1}{e}$. 2) $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$.

Indications :

1. Généralisée en 0. Forme $u' e^u$ ou changement de variable $u = 1/t$.
2. Faire apparaître une somme de Riemann et utiliser 1). En fait la fonction $t \mapsto \frac{e^{-1/t}}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11

Résultats : 1) $I = 1$ 2) $J = \frac{\pi}{2} - \ln 2$ 3) $K = -\ln 2$.

Indications : Pour 3) attention, chaque morceau diverge séparément, il faut passer par les intégrales partielles et regrouper les morceaux divergeant avant de passer à la limite.

Exercice 12

Résultats : 1) $I = \pi$ 2) $I = 0$.

Indications :

1. Poser $t = x + 2$ (et non $x = t + 2$ comme le suggère l'énoncé) pour simplifier le trinôme sous la racine et se ramener à de l'arcsinus.
2. Le changement $x = 1/t$ transforme l'intégrale en son opposée sur le même domaine. Mais on ne peut pas conclure pour le moment car on ne sait pas a priori si l'intégrale converge.

Exercice 13

Résultat : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Indication : f est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie ou $-\infty$. Et on prouve une absurdité si la limite est $-\infty$, ou finie non nulle.

Si la limite est $-\infty$ alors $f \leq -1$ sur $[A, +\infty[$ pour un certain A . En intégrant on montre une absurdité en obtenant une intégrale divergente.

Si la limite l est > 0 alors $f \geq \frac{l}{2}$ sur $[A, +\infty[$ pour un certain A .

Si la limite l est < 0 alors $f \leq \frac{l}{2}$ sur $[A, +\infty[$ pour un certain A .

Exercice 14

Résultats et indications:

1. $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t) dt$, intégrale faussement impropre (Intégrale de Wallis).
2. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.
3. $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
4. Étudier $\ln(I_{n+1}/I_n) = \ln(1 - \frac{1}{2n})$ et sommer (série télescopique divergente) pour montrer que $\ln I_n \rightarrow -\infty$.
5. La série $\sum (-1)^n I_n$ converge (Critère Spécial des Séries Alternées).
6. $I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$. On itère la relation de récurrence. C'est une grand classique.

Exercice 15

Indications :

1. Utilise la comparaison série-intégrale. Encadrer $f(k)$ entre $\int_k^{k+1} f$ et $\int_{k-1}^k f$ grâce à la décroissance de f , puis sommer et comparer aux sommes partielles de la série et aux intégrales partielles,

$$\int_N^{n+1} f \leq \sum_{k=N}^n f(k) \leq f(N) + \int_{N+1}^{+\infty} f.$$

Utiliser le cas de CV avec l'inégalité de droite et de divergence avec celle de gauche.

2. Montrer $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$ grâce à la monotonie de f , puis reconnaître une série télescopique convergente (car f tend vers une limite finie).

Exercice 16

Résultats : 1) $\ln 2$ 2) Propriété 3) $\ln 2$ 4) $\sin 1 - \cos 1$.

Indications :

1. Somme de Riemann usuelle.
2. Etude de fonction.
3. Encadrer la somme à l'aide de l'inégalité de la question 2. On retrouve la somme de 1); et encadrer la somme des cubes pour prouver qu'elle converge vers 0.
4. On utilise 2), pour encadrer :

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k^3}{6n^6} \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2}$$

On reconnaît dans les deux membres la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x \sin x$.

Et on prouve que la somme venant des cubes converge vers 0 en l'encadrant.

Exercice 17

Résultat : $2e^{\pi/2-2}$, $\frac{4}{e}$.

Calculer la limite de $\ln(u_n)$ dans les deux cas. On obtient une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ dans le premier cas et $x \mapsto \ln(1+x)$ dans le deuxième cas. On effectue une IPP dans le premier cas.

Exercice 18

Indications et résultats :

- Le trinôme $1 - 2a \cos x + a^2 = (a - \cos x)^2 + \sin^2 x$ ne s'annule jamais pour $a > 1$ et reste alors strictement positif. L'intégrande est alors continu sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale converge.
- Avec le discriminant : les racines sont $e^{ik\pi/n}$ et $e^{-ik\pi/n}$.
- Regrouper les $2n$ racines $2n$ -ièmes de l'unité deux par deux (conjuguées) pour retrouver les racines du trinôme précédent.
- Evaluer l'identité précédente en a , prendre le logarithme, diviser par n et reconnaître à gauche une expression équivalente à $2 \ln a$ (car $a^{2n} \rightarrow +\infty$) et à droite une somme de Riemann de $x \mapsto \ln(a^2 - 2a \cos x + 1)$ sur $[0, \pi]$.
On trouve $\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln a$.

Exercice 19

Indications :

1. Dériver l'égalité $\int_x^{x+T} f(t) dt = K$ (c'est une intégrale fonction de ses bornes, il y a une méthode) par rapport à x pour obtenir $f(x+T) - f(x) = 0$.
2. Montrer que si f est T -périodique, la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.
3. Écrire $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = 0$.
Contre-exemple : f constante non nulle.

Exercice 20

Indications :

1. Faire une IPP sur $\int_0^x f(t) dt$ avec $v(t) = t$, $u(t) = f(t)$, puis reconnaître dans le terme restant, après le changement de variable $t = f(s)$, l'intégrale $\int_0^{f(x)} f^{-1}$.
2. Utiliser la question précédente avec $x = a$, puis étudier la fonction $b \mapsto \int_0^a f + \int_0^b f^{-1} - ab$: dérivée nulle en $b = f(a)$, qui est donc un minimum global

Exercice 21

Indications :

1. Effectuer une intégration par parties et utiliser une comparaison pour l'intégrale restante.
2. Utiliser le théorème sur les séries alternées : la somme a le signe de son premier terme.

Exercice 22

Indications :

1. Cf. ex 13).
2. Encadrer $\int_{t/2}^t f(u) du$ à l'aide de la décroissance de f pour en déduire un encadrement de $f(t)$.
3. Ecrire $\int_0^N t(f(t) - f(t+1)) dt$, faire le changement de variable $u = t+1$ dans la partie en $f(t+1)$, regrouper les intégrales qui se recouvrent, et utiliser les résultats des questions 1) et 2) pour passer à la limite $N \rightarrow +\infty$.
$$I = \int_0^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 23

Indications :

1. Découper l'intégrale sur la subdivision $]1/(k+1), 1/k]$.
2. Décomposer $\frac{1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$. On trouve $2 - \frac{\pi^2}{6}$.
3. Découper I sur les intervalles $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ (où $\lfloor 1/x \rfloor = k$), calculer chaque morceau explicitement, puis faire apparaître la série de la question précédente dans la somme obtenue. On trouve $I = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 24

Résultats : 1) $+\infty$. 3) (u_n) croît et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. 6) $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-I} e^{-n}$.

Indications :

1. Minorer $e^t \geq 1$ pour obtenir une divergence logarithmique. Réponse : $+\infty$.
2. Poser $g(x) = \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ et montrer que g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$ à l'aide du théorème de la bijection monotone.
3. $u_n = g^{-1}(u_n)$ et la monotonie de g^{-1} est celle de g .
4. Intégrale faussement impropre en calculant la limite de l'intégrande en 0.
5. Écrire $n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t-1}{t} dt - \ln(u_n)$ pour faire apparaître I .
6. Écrire $\frac{e^t}{t} = \frac{e^t-1}{t} + \frac{1}{t}$ dans $g(u_n) = n$, ce qui fait apparaître $-\ln u_n$ et une intégrale de $\frac{e^t-1}{t}$ entre u_n et 1 ; faire tendre $n \rightarrow +\infty$ en utilisant $u_n \rightarrow 0$ et la convergence de I . Réponse : $n + \ln u_n \rightarrow I$.
7. Dédire de la question précédente que $\ln u_n = I - n + o(1)$. $u_n \sim e^I e^{-n}$.