

Espaces vectoriels

Exercice 1. (♡)-(♡♡)

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) On pose pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_k : x \mapsto |x - k|$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
- 3) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_k : x \mapsto e^{\alpha_k x}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 2. (♡) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer leur dimension.
- 2) Montrer alors qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications linéaires

Exercice 3. (♡♡) On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit l'application f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X+1) - P(X).$$

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le degré de $f(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer le noyau de f .
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a- Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f .
On note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b- Déterminer le rang puis l'image de f_n .
- 5) Montrer que f est surjectif.

Exercice 4. (♡) Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Exercice 5. (♡) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
- 2) On suppose ici que $f \circ g = \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

Exercice 6. (♡♡) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (i.e. f et g commutent). Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g .

Exercice 7. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, p un projecteur et f un endomorphisme de E . Montrer que p et f commutent si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .

Exercice 8. (♡) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 9. (♡♡) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E tel que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.

- 1) Montrer que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$. En déduire que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- 2) Déduire de ce qui précède que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 10. Noyaux et images des itérés

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \text{Ker } f^k$ et $I_k = \text{Im } f^k$.

- 1) ($\heartsuit$) Montrer que la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$.
- 2) ($\heartsuit\heartsuit$) Démontrer que, s'il existe un entier p tel que $N_p = N_{p+1}$, alors pour tout entier q supérieur ou égal à p , $N_q = N_{q+1}$ puis $N_q = N_p$.

(*) On suppose maintenant que E est dimension finie n .

- 3) Montrer que la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang p inférieur ou égal à n .
Dans la suite p désigne le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$.
- 4) Que peut-on dire de la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$?
- 5) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

Exercice 11. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension n . Montrer que n est pair si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } f = \text{Ker } f$.

Applications linéaires et matrices

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer que $\text{rg}(f) = 1$.
- 2) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit q le plus petit entier vérifiant la relation précédente (on l'appelle indice de nilpotence de u).

- 1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0_E$ et que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre.
- 2) Comparer q et n .
- 3) Dédurre finalement que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 4) Cas $n = p$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base et déterminer la matrice de f relativement à cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 14. (*) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. L'objectif de l'exercice est de prouver :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f \quad \text{et} \quad \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g.$$

- 1) A l'aide d'une inclusion entre $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im } g$ obtenir une des deux inégalités.
- 2) On pose h la restriction de g à $\text{Im } f$, $h = g|_{\text{Im } f}$. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } h$. En déduire à l'aide du théorème du rang l'autre inégalité voulue.
- 3) Application. Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Montrer que $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$.

Exercice 15. ($\heartsuit$)

- 1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Déterminer le rang de f , une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$.

- 2) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et g l'application linéaire canoniquement associée à B .

Déterminer le rang de g une base de $\text{Im } g$ et une base de $\text{Ker } g$.

Exercice 16. (♡) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que f est un projecteur.
- 2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
- 3) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une telle base est appelée une base adaptée à f .

Exercice 17. (♡) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $X \mapsto AX$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 3) Déterminer noyau et image de φ .

Exercice 18. (♡♡)- Diagonalisation Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- 1) Déterminer une base de chacun des noyaux suivants $\text{Ker } f$, $\text{Ker}(f - 4\text{Id})$, $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$.
- 2) En déduire une base $\mathcal{B}'$ où la matrice de f est diagonale. On notera D cette matrice.
- 3) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- 4) En déduire A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- 5) **Application :** déterminer le terme général des suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 7u_n + 4v_n - 3w_n \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = -1 \end{cases}.$$

Exercice 19. (♡) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à I_n .

Exercice 20. (♡) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 21. (♡) Montrer que les matrices suivantes sont semblables et déterminer la matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Puis calculer A^n .

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. (*) Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première ligne et la première colonne qui valent 1.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Déterminer une base de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.

Exercice 23. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et f l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M .

- 1) Montrer que $\text{rg}(f) = 1$ si et seulement si il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ tel que $M = UV^T$.
On suppose désormais que f est de rang 1 et on fixe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ tel que $M = UV^T$.
- 2) Montrer que $\text{tr}(f) = U^T V$.
- 3) Exprimer f^2 en fonction de f .

Exercice 24. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{rg}(A) = \text{Tr}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

Exercice 25. (♡♡) Soit p un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E . Montrer que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.

Exercice 26. (*) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. Résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(K)$

Exercice 27. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- 1) Calculer $\text{rg}(B)$ en fonction de $\text{rg}(A)$.
- 2) On suppose que A est inversible. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1} .

Déterminants

Exercice 28. (♡♡) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer et déterminer une forme factorisée des déterminants suivants:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 29. (♡♡) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 30. (*) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit Δ_n le déterminant de format $(2n, 2n)$ avec des a sur la diagonale principale et des b sur l'autre diagonale. Calculer Δ_n .

Exercice 31. (♡♡) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $D_n = \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & a & -a^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a^2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & a \end{vmatrix}_{[n]}$. Calculer D_n en fonction de n .

Exercice 32. (*)

- 1) Calculer le déterminant de la matrice blocs $\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$

Suppléments 5/2

Exercice 33. (*) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, f, g deux applications linéaires de E dans F . En utilisant l'application ϕ de $\text{Ker}(f + g)$ dans F qui à x associe $f(x)$, montrer l'inégalité

$$\dim \text{Ker}(f + g) \leq \dim(\ker f \cap \ker g) + \dim(\text{Im} f \cap \text{Im} g)$$

Exercice 34. (*) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, k un réel non nul, et u, v deux endomorphismes de E tels que $u^2 = ku$ et $v^2 = kv$.

- 1) Dans cette question uniquement on suppose que u est bijectif. Déterminer u .
- 2) Montrer qu'on a $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u - k \text{id}_E)$.
- 3) -a- Soit $z \in E$. On pose $y = z - u\left(\frac{1}{k}z\right)$. Calculer $u(y)$.
-b- Montrer qu'on a $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.
- 4) Montrer qu'on a $(u + v)^2 = k(u + v) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 35. (*) Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$ (où $f^3 = f \circ f \circ f$) et telle que $f \neq 0$.

- 1) Calculer $\det(-\text{Id})$; en déduire que f^2 est différent de $-\text{Id}$ puis que f n'est pas injectif.
- 2) Montrer que E est la somme directe de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ et que ces deux sevs sont $\neq \{0\}$.
- 3) Soit x tel que $f^2(x) \neq 0$; montrer l'existence d'un tel vecteur x , puis montrer que $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
- 4) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ est de dimension 2.
- 5) Écrire la matrice de f dans une base de E bien choisie.

Exercice 36. (*) Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E , vérifiant $\text{Im}(p) \subset \ker(q)$. On pose $f = p + q - p \circ q$.

- 1) Démontrer que f est un projecteur de E .
- 2) On note F l'espace sur lequel on projette et G l'espace parallèlement auquel on projette. Démontrer que $F = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ et que $G = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 37. (*) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p , et $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, E)$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = \text{Id}_F$.

- 1) Démontrer que $n \geq p$. Que peut-on dire de l'injectivité ou surjectivité de u ? de v ?
- 2) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de E .
- 3) Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 38. (*) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X + 1)$.

- 1) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$; déterminer son application réciproque.
- 2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) Calculer, pour i et j deux entiers non nuls tels que $i \leq j$, $\sum_{k=i}^j (-1)^{j-k} \binom{k-1}{i-1} \binom{j-1}{k-1}$

Exercice 39. (*) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, de coefficients diagonaux tous distincts. On considère l'endomorphisme Φ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Phi(M) = MD - DM.$$

- 1) Déterminer le noyau de Φ .
- 2) Déterminer l'image de Φ .

Exercice 40. (*) On considère la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Pour i, j, k, l entiers compris entre 1 et n , calculer $E_{ij}E_{kl}$.
- 2) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.
Pour $i \neq j$, calculer $\varphi(E_{ij})$. puis comparer $\varphi(E_{ii})$ et $\varphi(E_{jj})$.
En déduire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

Exercice 41. (*) Soit n un entier naturel impair et a, b deux nombres réels. On considère la matrice de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & a+b & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le déterminant de A à l'aide d'opérations sur les lignes (en supposant par exemple dans un premier temps que a est non nul).
- 2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . A l'aide d'un changement de bases, calculer le déterminant de A .