

Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée.

Exercice 1

Réponses

- 1) C'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
- 3) La famille (f_k) est libre (fonctions exponentielles à exposants distincts).

Indications

- 1) Bon cardinal et libre car....(argument rapide).
- 2) Prendre une combinaison linéaire nulle : $\sum \lambda_k f_k = 0$. Si l'un des λ_k est non nul, notons j l'indice correspondant alors on peut isoler

$$|x - j| = \frac{1}{\lambda_j} \sum \dots$$

Le membre de gauche n'est pas dérivable en j mais le membre de droite oui.

- 3) Prendre une combinaison linéaire nulle : $\sum \lambda_k f_k = 0$. Numéroté pour que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Quel est le terme prépondérant en $+\infty$?
Autrement : récurrence en dérivant la combinaison linéaire nulle.

Exercice 2

Réponses

- 1) $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- 2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Indications

- 1) Sev : caractérisation en trois points.
On peut aussi voir ces ensembles comme des noyaux d'applications linéaires, de $M \mapsto M^\top - M$ et $M \mapsto M^\top + M$.
Pour la dimension, exhiber une base avec les $E_{ij} : E_{ii}$ et $E_{ij} + E_{ji}$ pour les symétriques ; $E_{ij} - E_{ji}$ ($i < j$) pour les antisymétriques.
- 2) Deux méthodes : intersection = $\{0\}$ (que dit $M = M^\top = -M^\top$?) et somme des dimensions = n^2 ; ou bien analyse-synthèse : on trouve $M = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$.

Exercice 3

Réponses

- 2) $f(1) = 0$ et, pour $k \geq 1$, $\deg f(X^k) = k - 1$.
- 3) $\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X]$ (polynômes constants).
- 4) $\mathbb{R}_n[X]$ est stable ; $\text{rg } f_n = n$ et $\text{Im } f_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- 5) f est surjectif.

Indications

- 1) Linéarité et $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.
- 2) Développer $(X + 1)^k$ avec le binôme : le terme X^k disparaît, que reste-t-il en tête ?
- 3) $f(P) = 0 \iff P(X + 1) = P(X)$. Evaluer en les entiers, que dire alors de $P - P(0)$?
Ou utiliser le degré de $f(P)$ pour $\deg P \geq 1$.
- 4) Montrer $\deg f(P) \leq n - 1$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Puis théorème du rang avec $\dim \text{Ker } f_n = 1$; l'image est incluse dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: comparer les dimensions.
- 5) Pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, poser $N = \deg(Q)$ alors $Q \in \mathbb{R}_N[X] = \text{Im } f_{N+1}$.

Exercice 4

Réponses

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

Indications

- Traduire les deux assertions en termes d'éléments : $\forall x \in E, g(f(x)) = 0$ et $\forall y \in \text{Im } f, g(y) = 0$. Les deux énoncés se traduisent l'un en l'autre.

Exercice 5

Réponses

- 1) Les deux inclusions sont vraies pour tous f, g .
- 2) Si $f \circ g = \text{Id}_E$: $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

Indications

- Plusieurs inclusions à démontrer, utiliser le squelette classique, on prend x dans A et montrer qu'il est dans B pour prouver $A \subset B$.
- 1) Prendre $x \in \text{Ker } f$ et calculer $g(f(x))$. Pour l'image : $g(f(x)) = g(\text{quelque chose})$.
- 2) Il reste à montrer $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker } f$: si $g(f(x)) = 0$, appliquer f des deux côtés et utiliser $f \circ g = \text{Id}$. Pour $\text{Im } g \subset \text{Im}(g \circ f)$: partir de $y = g(z)$ et écrire $z = f(g(z))$.

Exercice 6

Réponses

$\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .

Indications

- Noyau : soit $x \in \text{Ker } f$, montrer que $g(x) \in \text{Ker } f$.
Image : Soit $y = f(x)$ dans $\text{Im } f$, montrer que $g(y) \in \text{Im } f$.

Exercice 7

Réponses

$$p \circ f = f \circ p \iff \text{Im } p \text{ et } \text{Ker } p \text{ sont stables par } f.$$

Indications

- ($\Rightarrow$) C'est l'exercice 6 appliqué à p et f .
- ($\Leftarrow$) Rappel : $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. Il suffit de vérifier $p \circ f = f \circ p$ sur chacun des deux sous-espaces : sur $\text{Im } p$ (où $p = \text{Id}$) et sur $\text{Ker } p$ (où $p = 0$).

Exercice 8

Réponses

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \text{ dès que } f^3 = f.$$

Indications

- E est de dimension finie; On utilise la caractérisation de la suppléantarité avec la dimension.
Que donne le théorème du rang?
Reste à prouver l'intersection nulle réduite au neutre.
Alternative : analyse synthèse (qui a le mérite de fonctionner si E n'est pas supposée de dimension finie).

Exercice 9

Réponses

- 1) $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- 2) $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Indications

- 1) N'y a-t-il pas mieux à faire qu'une double inclusion pour ces deux égalités?
Quelle est l'inclusion classique entre $\text{Im } f^2$ et $\text{Im } f$; $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$?

- 2) E est de dimension finie, utiliser la caractérisation la plus adaptée.
 Prouver que l'intersection est réduite à 0_E , Un élément de l'intersection s'écrit $x = f(y)$ (il est dans l'image) et vérifie $f(x) = 0$ (il est dans le noyau) donc....

Exercice 10

Réponses

- 1) $N_k \subset N_{k+1}$.
- 2) Si $N_p = N_{p+1}$ alors $N_q = N_p$ pour tout $q \geq p$.
- 3) (N_k) stationne à partir d'un rang $p \leq n$.
- 4) (I_k) est décroissante, et stationnaire à partir du même rang p ($I_p = I_{p+1} = \dots$).
- 5) $N_p \oplus I_p = E$.

Indications

- 1) Soit $x \in N_k$ alors $f^k(x) = 0_E$ donc en appliquant f ...
- 2) Récurrence sur $q \geq p$. Dans l'hérédité on suppose $N_q = N_{q+1}$. Pour prouver $N_{q+1} = N_{q+2}$, une inclusion découle de 1); pour l'autre inclusion prendre $x \in N_{q+2}$ alors... $f(x) \in N_{q+1}$ et donc...
- 3) Les dimensions $\dim N_k$ forment une suite d'entiers croissante car....., majorée par n car..... Et si elle était strictement croissante jusqu'à l'indice n , $\dim N_n$ serait au moins égale à...
- 4) Prouver l'inclusion $I_{k+1} \subset I_k$
- 5) Utiliser la caractérisation avec la dimension. Théorème du rang pour l'égalité des dimensions et prouver que l'intersection est réduite au vecteur nul.

Exercice 11

Réponses

$$n \text{ pair} \iff \exists f \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f.$$

Indications

- ($\Leftarrow$) Utiliser le théorème du rang.
 ($\Rightarrow$) Pour $n = 2m$, choisir une base $(e_1, \dots, e_{2m})$ et définir f sur la base : $f(e_i) = 0$ pour $i \leq m$ et $f(e_{m+i}) = e_i$. Vérifier que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

Exercice 12

Réponses

- 1) $\operatorname{rg} f = 1$.
- 2) Base (e_1, e_2, e_3) avec e_1 engendrant $\operatorname{Im} f$, e_3 tel que $f(e_3) = e_1$ et $e_2 \in \operatorname{Ker} f$ (voir pistes) : $\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indications

- 1) $f^2 = 0$ donne une inclusion entre $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ d'où une inégalité entre $\operatorname{rg} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f$; puis combiner avec le théorème du rang.
- 2) Poser le problème : on cherche une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$ et $f(e_3) = e_1$.
 Prendre (e_1) une base de l'image; compléter en une base (e_1, e_2) du noyau (on peut car...).
 e_1 s'écrit $f(\dots)$. Quel vecteur prendre pour compléter (e_1, e_2) en une base de E . Montrer que c'est effectivement une base.

Exercice 13

Réponses

- 1) $\exists x, u^{q-1}(x) \neq 0$ et $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre.
- 2) $q \leq n$.
- 3) $u^n = 0$.
- 4) Si $q = n$, $\mathcal{B}$ est une base, et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a des 1 sur la sous-diagonale et des 0 ailleurs (matrice de coefficients $(i+1, i)$ égaux à 1).

Indications

- 1) Existence : minimalité de q .
Liberté : partir d'une combinaison linéaire nulle $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Appliquer u^{q-1} pour montrer $\lambda_0 = 0$, puis u^{q-2} pour $\lambda_1 = 0$, etc.
- 2) Une famille libre a au plus n éléments.
- 3) $u^n = u^{n-q} \circ u^q$.
- 4) n vecteurs libres dans un espace de dimension n . On a $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$ et $u(u^{n-1}(x)) = 0$: lire les colonnes.
(L'énoncé écrit « $n = p$ » : il faut lire $n = q$.)

Exercice 14

Réponses

$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$, et de même pour $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$.

Indications

- 1) Inclusion classique entre $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im } g$ d'où
- 2) Ecire la définition de $\text{Im } h = g(\text{Im } f)$
Théorème du rang pour h définie sur $\text{Im } f$: $\text{rg } h \leq \dim \text{Im } f = \text{rg } f$.
- 3) Appliquer 1) et 2) aux endomorphismes canoniquement associés à A et B .

Exercice 15

Réponses

- 1) $\text{rg } f = 1$. $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 2, 3))$. $\text{Ker } f = \{x + 2y - z = 0\}$ de base $((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$.
- 2) $\text{rg } g = 2$. $\text{Im } g$ de base $((1, -1, 2), (2, 1, 3))$. $\text{Ker } g$ de base $((-2, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 1))$.

Indications

- 1) Repérer les colonnes proportionnelles. L'image est engendrée par les colonnes.
Pour le noyau exhiber à l'aide des relations de liaison sur les colonnes une famille libre de bon cardinal.
- 2) Même méthode : il est bon d'avoir repéré tout seul $C_3 = 2C_1 - C_2$, $C_4 = -2C_1$

Exercice 16

Réponses

- 1) $A^2 = A$.
- 2) f est le projecteur sur $\text{Im } f = \{-x + y + z = 0\}$ parallèlement à $\text{Ker } f = \text{Vect}((3, 1, 1))$; $\text{rg } f = A^\top = 2$.
- 3) Par exemple $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (3, 1, 1)$.

Indications

- 1) $A^2 = \dots$
- 2) On déterminer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ à l'aide d'opérations sur les colonnes.
- 3) Concaténer les bases de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
Pourquoi (très rapidement) (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Pourquoi la matrice a-t-elle la forme voulue?

Exercice 17

Réponses

- 2) Dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 3) $\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$ ($\dim 2$), $\text{Im } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ -p & -q \end{pmatrix} \right\}$ ($\dim 2$).

Indications

- 1) Linéarité de $X \mapsto AX$ (distributivité) et $AX \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Calculer $\varphi(E_{ij})$ pour chacun des quatre vecteurs de base et lire les coordonnées en colonnes.
- 3) Utiliser des relations de liaison sur les colonnes de la matrice pour déterminer noyau et image.

Exercice 18

Réponses

- 1) $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, -1, 1)$; $\text{Ker}(f - 4\text{Id}) = \text{Vect}(1, 0, 1)$; $\text{Ker}(f + 2\text{Id}) = \text{Vect}(1, -2, -1)$.
- 2) $D = \text{diag}(0, 4, -2)$ dans la base $\mathcal{B}' = ((1, -1, 1), (1, 0, 1), (1, -2, -1))$.
- 3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- 4) Pour $n \geq 1$: $A^n = 4^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (et $A^0 = I_3$).
- 5) Pour $n \geq 1$: $u_n = 2 \cdot 4^n + (-2)^n$, $v_n = (-2)^{n+1}$, $w_n = 2 \cdot 4^n - (-2)^n$ (et $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, -1)$).

Indications

- 1) Utiliser des relations de liaison sur les colonnes de la matrice pour déterminer noyau et image, c'est très rapide !
- 2) Prendre les vecteurs de la question précédente. Montrer qu'ils forment bien une base.
Pour la matrice : se souvenir que $u \in \text{Ker}(f - \lambda\text{Id})$ ssi $f(u) = \lambda u$.
- 3) Les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.
- 4) Inverser par pivot de Gauss. $A = PDP^{-1}$ par récurrence immédiate, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- 5) Écrire $X_{n+1} = AX_n$, donc par récurrence $X_n = A^n X_0$. Astuce : décomposer X_0 sur la base $\mathcal{B}'$ (coordonnées $-2, 2, 1$) évite de calculer A^n en entier.

Exercice 19

Réponses

Seule I_n est semblable à I_n .

Indications

- Si $A = P^{-1}I_nP$, que vaut $P^{-1}I_nP$?

Exercice 20

Réponses

$\text{tr}A = 7 \neq 6 = \text{tr}B$: A et B ne sont pas semblables.

Indications

- Chercher un invariant de similitude qui distingue les deux matrices : la trace, le rang, le déterminant. Le plus rapide ici : la trace.

Exercice 21

Réponses

- 1) Par exemple $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 2) Par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Indications

- Pour les deux questions, on pose (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 1) On cherche $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 \quad f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \quad f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$$

soit

$$(f - 2\text{Id})(\varepsilon_1) = 0, \quad (f - 2\text{Id})(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \quad (f - 2\text{Id})(\varepsilon_3) = \varepsilon_2.$$

On raisonne ensuite sur les colonnes de $A - 2I_3$ pour trouver les trois vecteurs.

$$\varepsilon_1 = (0, 1, 1) \quad \varepsilon_2 = (1, 1, 0) \quad \varepsilon_3 = (1, 0, 0).$$

2) Même méthode avec les conditions

$$f(\varepsilon_1) = 0 \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \quad f(\varepsilon_3) = 0.$$

ε_1 est à la fois dans le noyau et l'image (il s'écrit $f(\dots)$).

$$\varepsilon_1 = (1, -3, -2) \quad \varepsilon_2 = (1, 0, 0) \quad \varepsilon_3 = (0, 1, 1).$$

Exercice 22

Réponses

Pour $n \geq 2$: $\text{rg } f = 2$, $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_2 + \dots + e_n)$ et une base du noyau $(e_i - e_2)_{3 \leq i \leq n}$ (dimension $n - 2$).

Indications

- Les colonnes donnent une famille génératrice de l'image.

Les relation de liaison $C_3 - C_2 = C_4 - C_2 = \dots = C_n - C_2 = 0$ donnent $n - 2$ vecteurs du noyau.

Exercice 23

Réponses

3) $f^2 = \text{Tr}(f) f$.

Indications

- 1) $(\Leftrightarrow)$: toutes les colonnes sont proportionnelles à une même colonne non nulle U : par blocs $M = (\alpha_1 U | \dots | \alpha_n U)$.
 V la matrice colonne contenant les α_i convient.
- 2) $U^\top V = \sum_i u_i v_i$.
- 3) Calculer $M^2 = UV^\top UV^\top$ et remarquer que $V^\top U$ est un scalaire.

Exercice 24

Indications

- Utiliser l'exercice 23.

Exercice 25

Réponses

$$\text{rg } p = \text{Tr}(p).$$

Indications

- Pour un projecteur $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$. Choisir une base adaptée à cette décomposition. Quelle est la matrice de p ? Rappel : la trace ne dépend pas de la base.

Exercice 26

Réponses

Si $\text{Tr } A \neq -1$: unique solution $X = B - \frac{\text{Tr } B}{1 + \text{Tr } A} A$.

Si $\text{Tr } A = -1$ et $\text{Tr } B \neq 0$: aucune solution.

Si $\text{Tr } A = -1$ et $\text{Tr } B = 0$: les solutions sont les $X = B - \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (infinité de solutions).

Indications

- Analyse : prendre la trace de l'équation pour obtenir $\text{Tr}(X)(1 + \text{Tr } A) = \text{Tr } B$. Discuter selon que $1 + \text{Tr } A$ est nul ou non.
Synthèse : vérifier que les X trouvés sont bien solutions (recalculer leur trace).

Exercice 27

Réponses

- 1) $\text{rg } B = 2 \text{rg } A$.
- 2) $B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

Indications

- 1) Opération par blocs de colonnes : pour $1 \leq j \leq n$, $C_{n+j} \leftarrow C_{n+j} - C_j$ (par blocs) ne change pas le rang et transforme B en une matrice diagonale par blocs. On échelonne les n premières colonnes puis les n dernières.
- 2) Chercher un inverse de même forme triangulaire par blocs, ou vérifier directement $BB^{-1} = I_{2n}$ avec le produit par blocs.

Exercice 28

Réponses

- 1) $(b-a)(c-a)(c-b)$.
- 2) $(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.
- 3) $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$.

Indications

- 1) $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, puis factoriser.
- 2) Même méthode : après les opérations, chaque colonne est divisible par $(b-a)$ et $(c-a)$.
- 3) Ajouter toutes les colonnes à la première : on factorise a^2+ab+b^2 .

Exercice 29

Réponses

$$D_n = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

Indications

- $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$: la première colonne devient constante, égale à $a+(n-1)b$. Factoriser, puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour obtenir une matrice triangulaire.

Exercice 30

Réponses

$$\Delta_n = (a^2 - b^2)^n.$$

Indications

- On effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j + C_{n+j}$ pour $1 \leq j \leq n$.
Puis $L_{n+j} \leftarrow L_{n+j} - L_j$.
On peut aussi développer selon L_1 , puis développer encore une fois, pour trouver $\Delta_n = (a^2 - b^2)\Delta_{n-1}$.

Exercice 31

Réponses

$$D_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} a^n.$$

Indications

- Développer par rapport à la dernière ligne (ou colonne) : relation de récurrence d'ordre 2 de la forme $D_n = aD_{n-1} + 2a^2D_{n-2}$.
Calculer D_1, D_2 , résoudre par l'équation caractéristique $r^2 = ar + 2a^2$ (racines $2a$ et $-a$).

Exercice 32

Réponses

- 1) $\det \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} = (ad - bc)^n$.

$$2) \det \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} = (ad - bc)^n (\det M)^2.$$

Indications

- 1) Réordonner pour obtenir une matrice diagonale par blocs 2×2 , comme dans l'exercice 30 ; ou opérations par blocs de lignes.
- 2) Écrire cette matrice comme produit $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$ et utiliser le déterminant d'un produit.

Exercice 33

Indications

- Théorème du rang pour φ : $\dim \text{Ker}(f + g) = \dim \text{Ker } \varphi + \text{rg } \varphi$.
 Puis, montrer $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ (si $f(x) = 0$ et $f(x) + g(x) = 0 \dots$).
 Puis montrer $\text{Im } \varphi \subset \text{Im } f \cap \text{Im } g$ (si $f(x) + g(x) = 0$, alors $f(x) = g(?)$).

Exercice 34

Réponses

- 1) $u = k \text{id}_E$.
- 3)-a- $u(y) = 0$

Indications

- 1) Composer $u^2 = ku$ par u^{-1} .
- 2) Raisonner par double inclusion.
- 3)-a- Développer avec la linéarité et $u^2 = ku$.
- 3)-a- 3)-a- vous donne une décomposition.
 Pour l'unicité montrer que l'intersection est réduite au neutre.
- 4) Développer $(u + v)^2$: l'égalité équivaut à $uv + vu = 0$.
 Sens direct : composer $u \circ v + v \circ u = 0$ à gauche puis à droite par u et comparer, pour obtenir $u \circ v = v \circ u$, puis $2u \circ v = 0$.

Exercice 35

Indications

- 1) $\det(-\text{Id}) = (-1)^3$.
 Si $f^2 = -\text{Id}$, prendre le déterminant : $(\det f)^2 = -1$, impossible dans $\mathbb{R}$.
 Si f était injectif alors f serait bijectif car est un endomorphisme en dimension finie, on pourrait simplifier $f \circ (f^2 + \text{Id}) = 0$ en composant par f^{-1} .
- 2) Analyse-synthèse : on trouve la décomposition $x = (x + f^2(x)) - f^2(x)$.
- 3) Si $f^2 = 0$ pour tout x , alors $f^3 = 0$, donc $f = 0$.
 Libre : combinaison $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0$, appliquer f pour avoir une seconde relation, puis éliminer. Vérifier également que les deux vecteurs sont dans $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
- 4) Par double inégalité en utilisant 2) et 3).
- 5) Prendre e un vecteur non nul de $\text{Ker } f$, et la base $(e, f(x), f^2(x))$ (montrer que c'en est une). On trouve $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 36

Indications

- 1) L'hypothèse $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ équivaut à $q \circ p = 0$. Développer $(p + q - p \circ q)^2$ et supprimer tous les termes contenant $q \circ p$.
- 2) $F = \text{Im } f$ et $G = \text{Ker } f$.
 $\text{Im } f : f(x) = p(x) + q(x - p(x))$ donne $\text{Im } f \subset \text{Im } p + \text{Im } q$. Réciproquement, calculer $f(p(x))$ et $f(q(x))$.
 $\text{Ker } f : p \circ f = p$ (à vérifier), donc $f(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ puis $q(x) = 0$.

Exercice 37

Réponses

- 1) u est surjectif, v est injectif, donc $n \geq p$.
- 2) $(v \circ u)^2 = v \circ u$.
- 3) $\text{rg}(v \circ u) = p$, $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v$, $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u$.

Indications

- 1) Montrer que $\text{Im } u = F$ et $\text{Ker } v = \{0\}$.
- 2) Calculer $(v \circ u) \circ (v \circ u)$ en regroupant $u \circ v$.
- 3) $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u) = v(F)$; v injectif donne $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u$. Rang : $\dim v(F) = \dim F$ car v est injective.

Exercice 38

Réponses

- 1) φ est un automorphisme, $\varphi^{-1}(P) = P(X - 1)$.
- 2) Dans la base $(1, X, \dots, X^n)$: matrice triangulaire supérieure de coefficient $\binom{j}{i}$ en position (i, j) , $0 \leq i, j \leq n$.
- 3) La somme vaut δ_{ij} : 1 si $i = j$, 0 si $i < j$.

Indications

- 1) Linéarité, stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ (le degré est conservé), puis exhiber l'application $\psi : P \mapsto P(X - 1)$ et vérifier $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$.
- 2) Calculer $\varphi(X^j) = (X + 1)^j$ avec le binôme.
- 3) Interpréter la somme comme un coefficient du produit des matrices de φ et φ^{-1} (indices décalés de 1 car $i, j \geq 1$).

Le produit des matrices vaut I_n . Sens à donner : $\sum_{k=i}^j (-1)^{j-k} \binom{k-1}{i-1} \binom{j-1}{k-1}$.

Exercice 39

Réponses

- 1) $\text{Ker } \Phi =$ matrices diagonales (dimension n).
- 2) $\text{Im } \Phi =$ matrices à diagonale nulle (dimension $n^2 - n$).

Indications

- 1) Calculer le coefficient (i, j) de $\Phi(M)$: c'est $m_{ij}(d_j - d_i)$.
Pour l'image : $\Phi(M) = 0_n$ ssi pour $i \neq j$, $m_{ij} = 0$. Pas de condition sur les coefficients diagonaux.
- 2) Pour l'image : montrer l'inclusion dans les matrices à diagonale nulle, puis comparer les dimensions (théorème du rang).

Exercice 40

Réponses

- 1) $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
- 2) $\varphi(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$; $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$; donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$ avec $\lambda = \varphi(E_{11})$.

Indications

- 1) Regarder les produits de matrices élémentaires : que valent $E_{ij}E_{kl}$ selon que $j = k$ ou non ?
- 2) Pour $i \neq j$, écrire $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}$ et calculer aussi $E_{ij}E_{ii}$. Pour $\varphi(E_{ii})$ et $\varphi(E_{jj})$: les écrire comme $E_{ij}E_{ji}$ et $E_{ji}E_{ij}$.
Conclure par linéarité en décomposant $M = \sum m_{ij}E_{ij}$.

Exercice 41

Réponses

- 1) $\det A = (a + b)(a^2 - b^2)^{(n-1)/2}$.
- 2) Même résultat, via la base adaptée : f est diagonalisable de valeurs propres $a + b$ (multiplicité $\frac{n+1}{2}$) et $a - b$ (multiplicité $\frac{n-1}{2}$).

Indications

- 1) Pour $a \neq 0$, faire $L_{n+1-i} \leftarrow L_{n+1-i} - \frac{b}{a}L_i$ pour $i < \frac{n+1}{2}$: la matrice devient triangulaire ; chaque paire donne $a \cdot (a - \frac{b^2}{a}) = a^2 - b^2$. Le cas $a = 0$ se traite par continuité ou directement.
- 2) Base : les vecteurs $e_i + e_{n+1-i}$ (pour $i < \frac{n+1}{2}$), $e_i - e_{n+1-i}$ et $e_{(n+1)/2}$. Calculer f sur chacun. Le déterminant est indépendant de la base.