

Exercice 28

$$(b-a)(c-a)(c+b)$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Méthode 1 : déterminant des Vandermonde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$

Méthode 2 : $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b-a(b+a) & c-a(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \quad \text{linéarité p/l } C_2, C_3$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \quad \text{dev selon } C_1$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a - (b+a))$$

$$\Delta_1 = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \cdot 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

det selb u L_1

$$= (b-a)(c-a) (c^2+ac+a^2 - b^2-ab-a^2)$$

$$= (b-a)(c-a) [(c-b)(c+b) + a(c-b)]$$

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b^2 & (a-b)(a+b) & b(a-b) \\ ab & b(b-a) & a(a-b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a^2 & a & b+a \\ b^2 & -a-b & -b \\ ab & b & -a \end{vmatrix}$$

linéarité p/a' C_2, C_3

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + ab & 0 & 0 \\ b^2 & -a-b & -b \\ ab & b & -a \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$= (b-a)^2 (a^2 + b^2 + ab) \begin{vmatrix} -a-b & -b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

dev selon C_1

$$= (b-a)^2 (a^2 + b^2 + ab) (a(a+b) + b^2)$$

$$\boxed{\Delta_3 = (b-a)^2 (a^2 + b^2 + ab)^2}$$

Méthode 2

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$\Delta_3 = (a^2 + b^2 + ab) \begin{vmatrix} 1 & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= (a^2 + b^2 + ab) \begin{vmatrix} 1 & ab & b^2 \\ 0 & a(a-b) & b(a-b) \\ 0 & b(b-a) & (a-b)(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + ab)(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & b^2 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dividiere } a \text{ in } L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$= (a^2 + b^2 + ab)(a-b)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{vmatrix} \quad \text{determinante}$$

$$\Delta_3 = (a^2 + b^2 + ab)^2 (a-b)^2$$

$$\begin{aligned} C_1 &\leftarrow C_1 - C_n \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_{n-1} \\ &\vdots \\ C_n &\leftarrow C_n - C_{n+1} \end{aligned}$$

$$= (a-b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & b \\ & & & -1 & a \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & & & a \end{vmatrix} \quad [2n]$$

$$L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_n$$

$$\begin{aligned} L_{2n-2} &\leftarrow L_{2n-1} + L_{2n-3} \\ L_{2n} &\leftarrow L_{2n} + L_{2n-1} \end{aligned}$$

$$= (a-b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & b & \\ & 0 & & & & a+b \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (a-b)^n (a+b)^n$$

der Triangelen

Exercice 31. (♡♡) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $D_n =$. Calculer D_n en fonction de n .

$$D_n = \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & a & -a^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a^2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

Determinant triangulaire (classique)

Develop. selon L_1 :

$$D_n = a(-1)^{1+1} D_{n-2} + (-a^2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a^2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= a D_{n-2} + a^2 \times 2 \times (-1)^{1+1} D_{n-2}$$

dev selon L_1

$$D_n = a D_{n-1} + 2a^2 D_{n-2}$$

On pose (el): $r^2 - ar - 2a^2 r = 0$ $\Delta = a^2 + 8a^2 = (3a)^2 > 0$

solution: $\frac{a-3a}{2} = -a$, $\frac{a+3a}{2} = 2a$ (2 solutions $\neq$)

On pose $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \lambda(-a)^n + \mu(2a)^n$$

$$D_1 = |a| = a$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & -a^2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a^2$$

$$\begin{cases} D_1 = a \\ D_2 = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda a + \mu \times 2a = a \\ \lambda a^2 + \mu \times 4a^2 = 3a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 1 \\ \lambda + 4\mu = 3 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = -\frac{1}{3}(-a)^n + \frac{1}{3}(2a)^n$$

Exercice 19. (♥) Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables à I_n .

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ semblable à I_n .

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq : $A = P^{-1} I_n P = P^{-1} P = I_n$.

Réponse: I_n est la seule matrice semblable à I_n .

Exercice 22. (*) Soit la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première ligne et la première colonne qui valent 1.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Déterminer une base de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.

Supposons $n \geq 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix}_{[n]}$$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

$C_2 = C_3 = \dots = C_n$ donc $\text{rg}(M) \leq 2$

C_1, C_2 ne sont pas proportionnelles donc $\text{rg}(M) \geq 2$ } $\text{rg}(M) = 2$

Base de $\text{Im } f$: $(e_1, \dots, e_n, e_1)$

Base de $\text{Im } A$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Th du rang: $\dim \text{Ker } f : \dim \mathbb{R}^n - \text{rg}(f) = n - 2$

$$C_3 - C_2 = C_4 - C_2 = \dots = C_n - C_2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } M$$

$M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_{n-2}$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2} \in \mathbb{R}$ tq: $\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \pi_i = 0_{n-2}$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_{n-2} = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{card } \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$$

$$\lambda_{n-2} = 0$$

D'où $(\pi_1, \dots, \pi_{n-2})$ libre.

De plus $\text{card } (\pi_1, \dots, \pi_{n-2}) = n-2 = \dim K^M$

Donc c'est une base de K^M

D'où une base de K^f : $(e_3 - e_2, e_4 - e_3, \dots, e_n - e_2)$

Exercice 23. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et f l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M .

- 1) Montrer que $\text{rg}(f) = 1$ si et seulement si il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ tel que $M = UV^T$.
On suppose désormais que f est de rang 1 et on fixe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ tel que $M = UV^T$.
- 2) Montrer que $\text{tr}(f) = U^T V$.
- 3) Exprimer f^2 en fonction de f .

1) $\text{rg}(f) = 1$ si $\text{rg}(M) = 1$.

On pose $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ U non nulle

, Soit $\text{rg}(M) = 1$ alors $M = (\beta_1 U \mid \beta_2 U \mid \dots \mid \beta_n U)$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \leftarrow V^T$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \dots & \alpha_1 \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n \beta_1 & \dots & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix}$$

$U \qquad \beta_1 U \qquad \beta_n U$

$$= UV^T \text{ où } V = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

• Réciproquement si $M = UV^T$

où U, V non nulles alors $\text{rg}(M) = 1$.

2) $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$

or $U^T V = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$

$\text{Tr}(f) = U^T V$

3) calcul de f^2 :

$$M^2 = U(V^T U) V^T$$

$$= \text{Tr}(U) U V^T$$

$$= \text{Tr}(f) M$$

$$\begin{aligned} V^T U &= (p_1 \dots p_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \sum \alpha_i p_i = \text{Tr}(U) \\ &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc:

$$f^2 = \text{Tr}(f) f$$