

Dénombrement

Exercice 1. (♡) Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20:

- 8 boules blanches numérotées de 1 à 8
- 12 boules noires numérotées de 9 à 20.

- 1) On tire simultanément 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a- A : "on tire au moins une noire"
 - b- B : "on ne tire que des numéros pairs"
 - c- C : "on tire exactement 2 boules blanches et 3 boules noires"
- 2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise. Mêmes questions.
- 3) On tire successivement 5 boules de l'urne avec remise. Mêmes questions.

Exercice 2. (♡) On distribue 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'avoir:

- 1) exactement 2 coeurs et exactement 1 valet
- 2) au moins 1 coeur et au moins 1 valet
- 3) exactement 2 coeurs et au moins 1 valet.

Exercice 3. (**) Une puce part de $O(0,0)$ et à chaque saut se déplace de façon équiprobable d'une unité vers le haut, vers le bas, vers la gauche, vers la droite.

Quelle est la probabilité que la puce se retrouve au point O après n sauts ?

Donner un équivalent de cette probabilité en $+\infty$ lorsque n est pair.

Indication : On aura besoin de l'égalité $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ qu'on pourra redémontrer par un argument combinatoire

Probabilités conditionnelles

Exercice 4. (♡♡) Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ.

On pose N le nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte.

On envisage les trois cas de figure suivants. Déterminer la loi de N dans chacun de ces trois cas.

- 1) Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.
- 2) Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.
- 3) Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.

Il peut être judicieux d'introduire les événements S_k : "la porte de sortie est choisie au k -ième essai".

Exercice 5. (♡♡) On dispose d'un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont truqués. Pour un dé truqué la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

On choisit un dé dans le lot.

- 1) On lance le dé choisi une fois. On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit truqué?
- 2) On lance le dé choisi n fois. On obtient toujours 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit truqué? Déterminer la limite de (p_n) . Surprenant?

Exercice 6. (♡♡) On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de $\frac{1}{3}$:

- si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec le dé A
- si on obtient face on décide de jouer uniquement avec le dé B.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
- 2) On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
- 3) On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A. Déterminer la limite de (p_n) . Surprenant?

Exercice 7. (*) On dispose d'une infinité d'urnes numérotées par les entiers strictement positifs. Pour chaque entier $n > 0$, l'urne numéro n contient 5^n boules, dont n sont blanches. On réalise l'expérience suivante :

- on lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention de la face 6 . On note n le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de cette face
- on tire alors une boule dans l'urne numéro n .

- 1) Soit $x \in [0, 1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. On écrira $n = \sum_{k=1}^n 1$ et on effectuera l'échange des sommes à l'aide de la sommation par paquets.
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche lors de cette expérience?
- 3) Après réalisation de l'expérience, on constate qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité que celle-ci ait été tirée dans l'urne numéro n ?

Exercice 8. (♡♡) Un message binaire (0 ou 1) est émis par E_0 , puis retransmis par E_1 , puis $E_2 \dots$ et arrive enfin à E_n . À chaque transmission, le message retransmis est le message reçu avec probabilité $p \in]0, 1[$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'événement : "le message reçu par E_k soit le message initial" et $a_k = P(A_k)$.

- 1) Calculer a_k en fonction de a_{k-1} pour $k \geq 1$.
- 2) Calculer a_n en fonction de n et de p . Quelle est la limite de a_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 9. (*) Trois opérateurs de téléphonie mobile A, B, C possédant chacun un tiers du marché, mettent en place une nouvelle offre de forfait. À la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante:

- les clients de A se répartissent de façon équiprobable entre A et B et C
- les clients de B restent chez B
- les clients de C seront chez A, B, C avec probabilités respectives $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n les probabilités pour qu'à l'issue de la n -ième année un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C .

- 1) Déterminer une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$. On pourra introduire les événements A_n (resp. B_n et C_n), "à l'issue de la n -ième année le consommateur décide d'être client de A " (resp B, C).
- 2) En déduire le terme général des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ en fonction de n , puis les limites de ces suites. On montrera que les suites (a_n) et (c_n) vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Variables aléatoires

Exercice 10. (♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Montrer que X est bien une variable aléatoire puis calculer les probabilités des événements $(X \geq 10)$ et $(X \text{ impair})$.

Exercice 11. (♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 2$) dont la loi est donnée par : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \alpha(k^3 - k)$. Déterminer α .

Exercice 12. (♡♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P([X = n + 1]) = \frac{4}{n} P([X = n])$$

- 1) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*, P([X = n])$ en fonction de $P([X = 1])$ et n .
- 2) En déduire $P([X = 1])$ puis la loi de X .

D'autres exercices (description d'événements, continuité monotone...)

Exercice 13. (♡♡) L'urne U , au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n - 1$ boules noires ($n \geq 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante:

- si on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné;
- sinon on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire supplémentaire dans l'urne U et on procède au tirage suivant.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- A_k : "la partie se termine au k -ième tirage"
- B_k : "on tire une noire aux k premiers tirages"
- N_k : "on tire une noire au k -ième tirage".

Calculer les probabilités des événements suivants, après les avoir décrits si besoin à l'aide des événements N_k :

$$B_k, A_k, \bigcup_{h \leq k} A_h, \overline{A_k \cup B_k}, \bigcup_{h \geq 1} B_h, \bigcup_{h \geq 1} A_h, \bigcap_{h \geq 1} B_h.$$

Exercice 14. (♡♡) Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé 6 à faces (supposé parfaitement équilibré).

- A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête.
- Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête.
- Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le résultat du n -ième lancer, A_{2n-1} l'événement « A gagne au $(2n - 1)$ -ième lancer » et B_{2n} l'événement « B gagne au $2n$ -ième lancer ».

- 1) Soit n entier naturel non nul. Exprimer A_{2n-1} et B_{2n} à l'aide des $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, puis calculer leur probabilité.
- 2) Quelles sont les probabilités des événements G_A : « A gagne », G_B : « B gagne » et H : « la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 15. (♡♡) Un rond-point possède deux entrées, A et B . Une voiture entre par l'entrée A . À chaque fois qu'elle passe devant la sortie A , elle choisit soit de continuer à tourner (avec probabilité p_A), soit de sortir. Elle a le même comportement devant la sortie B (probabilité p_B de continuer à tourner).

- 1) Déterminer la probabilité que la voiture sorte à la sortie B .
- 2) Quelle est la probabilité que la voiture tourne indéfiniment?

Exercice 16. (*) On lance une infinité de fois une pièce truquée : P sort avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité d'obtenir le motif PP sans que le motif PF soit apparu avant PP ?

Exercice 17. (**) Loi du 0-1 de Kolmogorov

On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements mutuellement indépendants.

$$1) \text{ Interpréter } A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right).$$

2) Montrer que, si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$.

3) Soit (u_n) une suite de nombres réels tous compris entre 0 et 1.

$$\text{Démontrer que, pour tout } (k, l) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } k \leq l, \prod_{i=k}^l (1 - u_i) \leq \exp \left(- \sum_{i=k}^l u_i \right).$$

En déduire que, si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors $P(A) = 1$.

4) On lance indéfiniment une pièce. Quelle est la probabilité qu'une infinité de fois, on obtienne deux piles successifs?

Suppléments 5/2

Exercice 18. (*)

- 1) Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{n\}) = 0$$

- 2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0.$$

Exercice 19. (♡♡)

Un objet se déplace sur une droite graduée. À chaque instant, il est sur un des points dont l'abscisse est entière entre 0 et N (compris). Quand, à un instant, il est sur le point d'abscisse $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, il passe à l'instant suivant sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou sur celui d'abscisse $k-1$ avec la probabilité $q = 1-p$. Quand il est en 0 ou en N , il y reste. Pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note u_k la probabilité qu'en partant du point d'abscisse k , l'objet arrive au point d'abscisse N (au bout d'un temps quelconque).

- 1) Que valent u_0 et u_N ?
- 2) Montrer que, pour $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$.
- 3) Exprimer u_k en fonction de k pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
- 4) Montrer que la probabilité que l'objet atteigne 0 ou N est 1.

Exercice 20. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) On considère une urne comportant n boules rouges et n boules vertes. En dénombrant les tirages de n boules de cette urne, démontrer la relation :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- 2) Deux joueurs A et B lancent chacun n fois une pièce équilibrée. Le gagnant (s'il existe) est celui qui obtient le plus de piles. Calculer la probabilité qu'il y ait égalité. Calculer la probabilité que A gagne.

Exercice 21. (*)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée. Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

- 1) Déterminer la loi de X_1 .
- 2) Déterminer la loi de X_2 .
- 3) Déterminer la loi de X_n . *On pourra conjecturer le résultat, que l'on démontrera par récurrence*