

Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquent une question sans donner la solution rédigée.

Exercice 1

Réponses

1) Tirage simultané de 5 boules (pas d'ordre, pas de répétition) :

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1931}{1938}, \quad P(B) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{21}{1292}, \quad P(C) = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{385}{969}.$$

2) Tirages successifs, sans remise, de 5 boules (ordre, pas de répétition) :

$$P(A) = 1 - \frac{\frac{8!}{3!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{1931}{1938}, \quad P(B) = \frac{\frac{10!}{5!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{21}{1292}, \quad P(C) = \frac{\frac{8!}{6!} \frac{12!}{9!} \binom{5}{3}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{385}{969}.$$

3) Avec remise (ordre, répétition) : $P(A) = 1 - \frac{2^5}{5^5} = \frac{3093}{3125}$, $P(B) = \frac{10^5}{20^5} = \frac{1}{32}$, $P(C) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$.

Indications

Dans les trois cas, il y a équiprobabilité des issues, donc on effectue le quotient du nombre des cas favorables sur les cas possibles.

- Pour A , passer par le contraire (« aucune noire »).
- Pour B , il y a exactement 10 numéros pairs.
- Pour C , dans 2) et 3) il faut penser à placer les blanches (ou les noires).

Exercice 2

Réponses

Il y a équiprobabilité, on effectue le quotient du nombre des cas favorables sur les cas possibles. Cas possibles :

$$\begin{aligned} & \binom{32}{8}. \\ 1) & \frac{\binom{7}{1}\binom{21}{6} + \binom{7}{2}\binom{3}{1}\binom{21}{5}}{\binom{32}{8}} \\ 2) & 1 - \frac{\binom{24}{8} + \binom{28}{8} - \binom{21}{8}}{\binom{32}{8}}. \\ 3) & \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{6} - \binom{7}{2}\binom{21}{6}}{\binom{32}{8}}. \end{aligned}$$

Indications

Attention : le valet de cœur est à la fois un cœur et un valet. Séparer les cartes en 4 catégories : valet de cœur (1), autres cœurs (7), autres valets (3), reste (21).

- 1) Distinguer deux cas : le valet de cœur est dans la main ou non.
- 2) Contraire de « au moins un cœur ET au moins un valet » : « pas de cœur ET OU pas de valet » puis la formule du cardinal d'une réunion.
- 3) Dénombrer « exactement 2 cœurs » puis retrancher « exactement 2 cœurs et aucun valet » (les 2 cœurs sont alors parmi les 7 non-valets).

Exercice 3

Réponses

Si n est impair, la probabilité est 0. Si $n = 2m$:

$$\mathbb{P}(\text{retour en } O) = \frac{1}{16^m} \binom{2m}{m}^2 = \left(\frac{\binom{2m}{m}}{4^m} \right)^2 \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi m} = \frac{2}{\pi n}.$$

Indications

- Si on note (x, y) les coordonnées du point où se trouve la puce. La somme $x + y$ change de parité, partant de $(0, 0)$ elle est donc paire après un nombre pair de déplacements et impaire après un nombre impair. Il est donc nécessaire que n soit pair pour revenir en $(0, 0)$.
- On pose $n = 2m$, on note h, b, g, d le nombre de déplacements en haut, en bas, à gauche, à droite respectivement. Un chemin revient en O ssi $h = b$ et $g = d$. De plus $h + b + g + d = n = 2m$.
Donc pour un chemin revenant en O : $h = b = m - d$ et $g = d$.
Les déplacements peuvent être effectués à n'importe quel moment, l'essentiel est qu'il y en ait le bon nombre.
Nombre de déplacements revenant en O avec d déplacements à droite : $\binom{2m}{d} \binom{2m-d}{d} \binom{2m-2d}{m-d} \binom{m-d}{m-d} = \dots = \binom{2m}{m} \binom{m}{d}^2$.
Par disjonction de cas sur le nombre de déplacements à droite, on obtient le nombre de déplacements revenant en O :

$$\sum_{d=0}^m \binom{2m}{m} \binom{m}{d}^2.$$

On utilise la somme donnée dans l'indication de l'énoncé.

- Pour le calcul de probabilité, il y a équiprobabilité de chaque liste de sauts choisis, il y en a $4^n = 16^m$ (4-liste d'un ensemble de 4 déplacements possibles).
- On utilise enfin l'équivalent de Stirling.

Exercice 4

Réponses

- N suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$: $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{4}$.
- $\mathbb{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$ et, pour $k \geq 2$, $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$.
- $N \sim \mathcal{G}(1/4)$: $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Indications

Poser S_k comme conseillé, puis écrire pour chaque cas de figure $[N = k] = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$ et utiliser la formule des probabilités composées, ou l'indépendance dans le troisième cas de figure.

- 1) $P(N = 1) = P(S_1) = \frac{1}{4}$, $P(N = 2) = P(\overline{S_1} \cap S_2) = P(\overline{S_1})P_{\overline{S_1}}(S_2) = \frac{3}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, etc...
- 2) $P(N = 1) = P(S_1) = \frac{1}{4}$,
 $P(N_k) = P(\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) = P(\overline{S_1})P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \times \dots \times P_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}}}(S_k) = \frac{1}{4} \frac{2}{3} \dots \frac{2}{3} \frac{1}{3}$
- 3) Les essais sont indépendants, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités. N suit une loi géométrique, on le verra plus tard.

Exercice 5

Réponses

- 1) $\frac{1}{2}$.
- 2) $p_n = \frac{1}{1 + 3^{1-n}}$ et $p_n \rightarrow 1$.

Indications

- 1) Formule de Bayes. On utilise au dénominateur la formule des probabilités totales avec le SCE $(T, \overline{T})$.
- 2) Formule de Bayes. Les lancers sont indépendants *conditionnellement* au dé choisi : $P_T(6^n) = (1/2)^n$, $P_{\overline{T}}(6^n) = (1/6)^n$.
Après simplification, diviser numérateur et dénominateur par le numérateur. On obtient toujours 6, il devient de plus en plus probable/certain que le dé soit truqué.

Exercice 6

Réponses

- 1) $P(R_1) = \frac{4}{9}$.
- 2) $P(R_3 | R_1 \cap R_2) = \frac{5}{9}$.
- 3) Avec $P(R^n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}$: $p_n = \frac{2^n}{2^n + 2} = \frac{1}{1 + 2^{1-n}} \rightarrow 1$.

Indications

- Formule des probabilités totales avec le SCE : $\{A, B\}$

• 2) $P(R_3 | R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)}$.

Les probabilités du numérateur et du dénominateur se calculent avec la formule des probabilités totales avec le SCE $\{A, B\}$. Les événements R_i sont indépendants conditionnellement au dé choisi.

- 3) Formule de Bayes.

Exercice 7

Réponses

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2) $P(\text{blanche}) = \frac{6}{125}$.

3) $P(\text{urne } n | \text{ blanche}) = \frac{25}{36} n \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Indications

1) Écrire $n = \sum_{k=1}^n 1$, d'où une somme double sur $\{1 \leq k \leq n\}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \dots$

2) Formule des probabilités totales avec le SCE : $(N=n)_{n \geq 1}$ où $P(N=n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.
 $P(\text{blanche} | N=n) = n/5^n$ Puis appliquer 1) avec $x = \frac{1}{6}$.

3) Bayes avec la même décomposition.

Exercice 8

Réponses

1) $a_k = (2p-1)a_{k-1} + (1-p)$, avec $a_0 = 1$.

2) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

Indications

1) Formule des probabilités totales avec le SCE : $(A_{k-1}, \overline{A_{k-1}})$.

2) Suite arithmético-géométrique : chercher le point fixe ℓ , puis $(a_k - \ell)$ géométrique de raison $2p-1$; remarquer $|2p-1| < 1$.

Exercice 9

Réponses

1)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n.$$

2) Conditions initiales : $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{1}{3}$.

$$a_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6}\right)^n, \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}, \quad b_n = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Limites : $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 1, c_n \rightarrow 0$.

Indications

1) Probabilités totales avec le système complet (A_n, B_n, C_n) :

$$a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \text{ etc...}$$

2) $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$. Même relation de pour (c_n) .

On trouve b_n à l'aide de $a_n + b_n + c_n = 1$.

Exercice 10

Réponses

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} = 1, \text{ donc c'est bien une loi ; } \mathbb{P}(X > 10) = \frac{1}{2^{11}} ; \mathbb{P}(X \text{ impair}) = \frac{1}{3}.$$

Indications

Une variable aléatoire discrète est définie par une famille (p_n) positive de somme 1 : vérifier cela.

$(X \geq 10) = \bigsqcup_{k \geq 10} (X = k)$: σ -additivité et somme de série géométrique.

$(X \text{ impair}) = \bigsqcup_{k \geq 0} (X = 2k + 1)$: série géométrique de raison $1/4$.

Exercice 11

Réponses

$$\alpha = \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}.$$

Indications

Condition : les probabilités sont positives et leur somme est égale à 1. Les sommes classiques $\sum k^3$ et $\sum k$ sont utiles.

Exercice 12

Réponses

$$1) \mathbb{P}(X = n) = \frac{4^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{P}(X = 1).$$

$$2) \mathbb{P}(X = 1) = e^{-4}, \text{ donc } \mathbb{P}(X = n) = e^{-4} \frac{4^{n-1}}{(n-1)!} \text{ pour } n \geq 1.$$

Indications

$$1) \text{ Itérer la relation puis récurrence, ou bien à l'aide du produit télescopique } \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)}.$$

2) Somme des probabilités égale à 1.

Exercice 13

Réponses

- Après $k-1$ tirages noirs, l'urne contient 1 blanche et $n+k-2$ noires.

$$P(B_k) = \frac{n-1}{n+k-1}, \quad P(A_k) = \frac{n-1}{(n+k-2)(n+k-1)},$$

$$P\left(\bigcup_{h \leq k} A_h\right) = \frac{k}{n+k-1}, \quad P(\overline{A_k \cup B_k}) = \frac{k-1}{n+k-2},$$

$$P\left(\bigcup_{h \geq 1} B_h\right) = \frac{n-1}{n}, \quad P\left(\bigcup_{h \geq 1} A_h\right) = 1, \quad P\left(\bigcap_{h \geq 1} B_h\right) = 0.$$

Indications

Description : $B_k = \bigcap_{j=1}^k N_j$ et $A_k = \bigcap_{j=1}^{k-1} N_j \cap \overline{N_k}$

Pour $P(B_k)$: formule des probabilités composées, simplifier le produit télescopique.

Pour $P(A_k)$: $A_k = B_{k-1} \cap \overline{N_k}$.

$\bigcup_{h \leq k} A_h$: union disjointe, somme télescopique en décomposant en éléments simples le terme général; ou bien c'est le contraire de B_k .

$\overline{A_k \cup B_k}$: événement contraire puis probabilité d'une réunion disjointe; ou bien $A_k \cup B_k = B_{k-1}$.

La suite (B_h) est décroissante : $\bigcup B_h = B_1$ et $P(\bigcap B_h) = \lim P(B_h)$ (continuité monotone).

$\bigcup A_h$ est le contraire de $\bigcap B_h$.

Exercice 14

Réponses

$$1) P(A_{2n-1}) = P(B_{2n}) = \frac{1}{3^n}.$$

2) $P(G_A) = P(G_B) = \frac{1}{2}, P(H) = 0.$

Indications

1) Écrire $A_{2n-1} = \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_{2k} \in \{1, 2, 3\}] \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_{2k-1} \in \{3, 4, 5, 6\}] \cap [X_{2n-1} \in \{1, 2\}].$

Utiliser l'indépendance des lancers. De même pour B_{2n} .

2) $G_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1}$ et $G_B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$: séries géométriques. Puis $H = \overline{G_A \cup G_B}$ (incompatibles).

Exercice 15

Réponses

Si $p_A p_B < 1$:

$$P(\text{sortie en } B) = \frac{p_A(1-p_B)}{1-p_A p_B}, \quad P(\text{tourne indéfiniment}) = 0.$$

(Sortie en A : $\frac{1-p_A}{1-p_A p_B}$.)

Indications

C'est un modèle très similaire à l'exercice précédent (modèle à deux joueurs).

Poser l'événement S_k : la voiture sort la k -ième fois qu'elle passe devant une sortie donc si k est pair elle sort en A et sinon c'est en B).

- 1) Exprimer l'événement : "sortie en B " à l'aide des S_k .
- 2) « Tourner indéfiniment » : par le contraire; ou bien une intersection décroissante des événements "au moins k tours" à exprimer à l'aide des B_k .

Exercice 16

Réponses

La probabilité vaut p .

Indications

Avant le premier Pile, il n'y a que des Faces Le premier Pile arrive presque sûrement.

Poser des événements F_n, P_n , pour décrire l'événement cherché.

L'événement cherché est : $\bigcap_{n \geq 2} F_1 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$, utiliser la σ -additivité pour faire apparaître une somme géométrique.

Exercice 17

Réponses

- 1) « une infinité des A_n se réalisent ».
- 4) La probabilité vaut 1.

Indications

1) Traduire « pour tout p , il existe $n \geq p$ tel que A_n se réalise ».

2) $A \subset \bigcup_{n \geq p} A_n$ pour tout p , sous-additivité, puis reste d'une série convergente.

3) Inégalité de convexité $1 - u \leq e^{-u}$, puis produit.

Passer au complémentaire $\bar{A} = \bigcup_p \bigcap_{n \geq p} \bar{A}_n$. La suite $\left(\bigcap_{n \geq p} \bar{A}_n \right)_p$ est croissante pour l'inclusion donc par continuité monotone croissante

$$P(\bar{A}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \geq p} \bar{A}_n\right)$$

L'indépendance des $\bar{A}_n$ donne $P\left(\bigcap_{n=p}^l \bar{A}_n\right) = \prod_{n=p}^l (1 - P(A_n))$.

Utiliser l'inégalité de la première partie avec $u_n = P(A_n)$ et faire tendre $l \rightarrow \infty$.

- 4) Poser $A_n = \ll \text{Pile aux lancers } 2n-1 \text{ et } 2n \gg$: événements indépendants de probabilité $1/4$ (blocs disjoints), série divergente.

Exercice 18

Réponses

Dans les deux cas, la limite est 0.

Indications

- 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = P(\mathbb{N}) = 1$: série convergente, donc son terme général tend vers 0 (σ -additivité).
- 2) Même idée : les A_n étant deux à deux incompatibles, $\sum P(A_n) = P(\bigsqcup A_n) \leq 1$.

Exercice 19

Réponses

- 1) $u_0 = 0$ et $u_N = 1$.
- 3) Si $p \neq q$: $u_k = \frac{1 - (q/p)^k}{1 - (q/p)^N}$; si $p = q = \frac{1}{2}$: $u_k = \frac{k}{N}$.
- 4) $P(\text{atteindre } 0) = 1 - u_k$; donc l'objet atteint 0 ou N avec probabilité 1.

Indications

- 1) Quand on est en 0 ou en N on y reste (point absorbant)
- 2) Formule des probabilités totales avec le SCE des événements A_j : "le point est à l'abscisse j à l'instant suivant".
- 3) Récurrence linéaire d'ordre 2 : équation caractéristique $pr^2 - r + q = 0$ de racines 1 et q/p ; **cas double si** $p = q$. Déterminer les constantes avec u_0 et u_N .
- 4) Appliquer la même méthode en échangeant les rôles : v_k est la probabilité qu'en partant de k , l'objet arrive au point 0. On obtient une expression de v_k similaire à celle de u_k , où p et q sont échangés. La probabilité cherchée est $u_k + v_k$, qui vaut 1.

Exercice 20

Réponses

$$P(\text{égalité}) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}, \quad P(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right).$$

Indications

- 1) Tirage simultané de n boules parmi $2n$. Distinguer les cas selon le nombre k de rouges. Utiliser en cours de route $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- 2) Égalité : même nombre de piles, k , pour A et B . Le nombre de piles X de pile pour A (resp. Y pour B) suit une loi binomiale de paramètre n , $1/2$.

$$[\text{égalité}] = \bigsqcup_{k=0}^n [X = k, Y = k]$$

Les événements $[X = k]$ et $[Y = k]$ sont indépendants, et $P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ on tombe alors sur la somme de la question 1).

Pour A gagne : symétrie entre A et B donc $P(A \text{ gagne}) = P(B \text{ gagne})$ et $P(\text{égalité}) + P(A \text{ gagne}) + P(B \text{ gagne}) = 1$.

Exercice 21

Réponses

- $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.
- $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$.
- X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$: $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

Indications

Poser des événements B_i et R_i qui caractérisent la couleur obtenue au i -ème tirage.

- 1) et 2) formule des probabilités composées.
- 3) Conjecturer à partir de 1) et 2). Puis récurrence sur n avec le système complet $([X_n = j])_j$ et le tirage $n + 1$ (dans l'urne après n tirages il y a $j + 1$ blanches sur $n + 2$ boules).