Exercice 1. (♡) Les intégrales suivantes sont-elles convergentes?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{t^4+2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$
3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\mathrm{d}t$
7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2. (♡♡) Discuter en fonction des paramètres de la nature des intégrales

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(1+t^\beta)}$
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$

Exercice 3. (♡♡) Étudier la nature des intégrales suivantes. Dans le cas de convergence, calculer la valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$
2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)\,(1-e^{-t})}$

Exercice 4. (♡) Établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, puis sa valeur, à l'aide du changement de variable $u=\frac{1}{t}$.

Exercice 5. (♡♡) Soit P une fonction polynomiale. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. (♡♡) On pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de F.

Exercice 7. (∗)

1) Justifier que, pour tout entier $n\geqslant 0$, l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire la valeur de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ (pour le calcul de I_0, voir l'exercice précédent).

Exercice 8. (∗)

1) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$. On note I sa valeur.
2) Montrer que $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt$. En déduire à l'aide d'un encadrement que $I=\ln 2$.

Exercice 9. (∗)

1) Montrer que $f: t\mapsto \dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\mathrm{Arctan}(t)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_x^{1} \frac{1}{\mathrm{Arctan}\,t^2}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 10. (∗)

1) Démontrer que, pour tout $x>0$, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
2) Démontrer l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\arctan t}{(1+t^2)^2}dt$.
3) Montrer que $F: x\mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\arctan t}{(1+t^2)^2}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x>0$.
   En déduire une expression de $F(x)$ en fonction de $x>0$.
4) En déduire la valeur de I.

Exercice 11. (♡)puis (∗)

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}\,(n > 0 \text{ pour } K_n)$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ \mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

1) Justifier la convergence de I.
2) **Intégrales de Wallis**.
   -a- Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$
   -b- Montrer que la suite (I_n) est décroissante et strictement positive.
   -c- En utilisant l'inégalité $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$, montrer que $I_n \sim I_{n-1}$.
   En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
3) Grâce à un changement de variable judicieux, exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales J_n et K_n en fonction d'intégrales I_k. (*Indication : pour K_n on pose $x = \tan t$*).
4) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$
en déduire que
$$\forall n \geqslant 2, \quad \sqrt{n} I_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n} I_{2n-2}$$
5) Conclure : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12. (♡)puis (∗) On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.
2) En minorant $\dfrac{1}{t}$ sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
3) En observant que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\ \mathrm{d}t$, déterminer le signe de I.
4) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\ \mathrm{d}t$.

Suppléments 5/2

Exercice 13 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0 , et que $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}t$ est convergente.
2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 14 Pour tout réel x, on pose $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$.

1) Démontrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} q(t)\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1$
3) La fonction $t \mapsto \dfrac{q(t)}{t}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application T-périodique et α un réel strictement positif. On note

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_0^T f \quad \text{et} \quad F : x \mapsto \int_0^x f - \lambda x.$$

1) Démontrer que la fonction F est périodique.
2) Démontrer la convergence et l'égalité des intégrales suivantes :

$$I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \alpha\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 16 Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\left(e^{\sqrt{t}}-1\right)}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}, e^u - 1 \geqslant u$.
3) Montrer qu'il existe $u_0 > 0$ tel que, pour tout $u \geqslant u_0, e^u - 1 \geqslant e^{u/2}$.
4) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.
2) Montrer que f' est intégrable sur $[1;+\infty[$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.
   -a- Vérifier que, pour tout $n \geqslant 2, w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)dt$.
   -b- En déduire que la série de terme général $f(n)$ converge.