Programme de colle de mathématiques
Semaine 5 - Du 2 au 7 Novembre 2026

III. Rappels et (compléments) d'algèbre linéaire

- Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Propriétés de la trace.
- Déterminant d'une matrice carré, d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme.
  Développement selon une ligne une colonne. Déterminant de Vandermonde.
  Cas d'une matrice tridiagonale. Terme général d'une suite à double récurrence linéaire : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
- Polynôme d'interpolation de Lagrange.

IV. Espaces probabilisés

- **Révisions PCSI** Résumé des techniques de dénombrement.
- Ensembles dénombrables. $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Produit cartésien d'ensembles dénombrables, réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables.
- Familles sommables de réels positifs. Sommation par paquets. Théorème de Fubini.
- Familles sommables de complexes. Linéarité, croissance, sommation par paquets.
- Tribus. Propriétés des opérations ensemblistes.
- Espaces probabilisés. Propriétés calculatoires sur les opérations ensemblistes. Continuité monotone (croissante et décroissante).
- Variables aléatoires discrètes. Loi d'une variable aléatoire. Image d'une variable aléatoire.
- Probabilités conditionnelles. Définition. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- Indépendance.
- **Pour le moment, pas de lois usuelles, pas d'espérance, pas de variance.**

Questions de cours (preuve à connaître)

- Trace d'un produit : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Déterminant d'une matrice tridiagonale. (En particulier terme général d'une suite à double récurrence linéaire : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Tous les cas $\Delta < 0, > 0, = 0$).
- Existence et unicité du polynôme d'interpolation. Démo qui utilise l'application : $P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$.
- Formule des probabilités totales avec un système complet d'événements (ou avec un système quasi-complet d'événements pour les plus à l'aise).
- Exemple d'expérience aléatoire conduisant à l'étude d'une suite arithmético-géométrique (chaîne de Markov à deux état). Exemple du cours : "professeur énervé" p_{n+1} en fonction de p_n ou exercice 8 du TD.