Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée. Essayez d'abord de chercher seul(e). Si vous bloquez, lisez la piste (sans la réponse), retentez, puis seulement ensuite comparez avec la réponse. Les pistes ne sont pas des rédactions : à vous de justifier proprement (continuité, signe, équivalent, comparaison, etc.).

Exercice 1

Exercices principaux

Exercice 1

Pour chacune des fonctions on pense à en étudier la continuité !
Si une comparaison est utilisée :

- ou bien elle prouve l'intégrabilité/non intégrabilité
- ou bien elle prouve la convergence/divergence mais dans ce cas un argument de signe doit être ajouté.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{t^4+2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Divergente.
   Piste. Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$: la fonction est continue.
   $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et comparez à une intégrale de Riemann.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Convergente
   Piste. Majorer la valeur absolue : $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}$. ?

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Convergente.
   Piste. Équivalent : $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ ou majorer la valeur absolue.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Convergente.
   Piste. Deux problèmes : 0 et $+\infty$.
   En 0 : équivalent de $\sin t$. En $+\infty$: majorez $|\sin t|$ par 1.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Divergente.
   Piste. En 0 : $\sin t \sim t$. La fonction est positive au voisinage de 0, la comparaison par équivalent est donc valable.

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$
   Réponse. Convergente ssi $\alpha < 2$.
   Piste. Deux problèmes : 0 et 1.
   En 0 : $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$.
   En 1 : $\ln t = \ln(1-(1-t)) \sim -(1-t)$, donc $f(t) \sim -(1-t)^{1-\alpha} = -\dfrac{1}{(1-t)^{\alpha-1}}$. Posez $u = 1-t$ ou bien utiser directement l'exemple de Riemann translatée. Un argument de signe est utile car on étudie aussi les cas de divergence.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\tan t}{t}\,\mathrm{d}t$

Réponse. Divergente.

Piste. Deux problèmes : 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
En 0, $f(t) \to 1$: limite finie en une borne finie.
En $\frac{\pi}{2}$, on pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On étudie seulement l'intégrabilité.

Réponse. Convergente ssi $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Piste. Calculez le module : $|e^{-zt}| = e^{-\mathrm{Re}(z)t}$. Si $\mathrm{Re}(z) > 0$: croissances comparées ($t^n e^{-\mathrm{Re}(z)t} = o(1/t^2)$). Si $\mathrm{Re}(z) \leq 0$: $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)}$

Réponse. Pour $\beta = 0$: divergente. Pour $\beta \neq 0$: convergente ssi 1 est strictement compris entre α et $\alpha+\beta$, c'est-à-dire $\big(\beta > 0$ et $\alpha < 1 < \alpha+\beta\big)$ ou $\big(\beta < 0$ et $\alpha+\beta < 1 < \alpha\big)$.

Piste. La fonction intégrée est positive.
Dans chaque cas, trouvez deux équivalents (un en 0, un en $+\infty$) de la forme $t^{-\gamma}$. Puis discuter.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\big)\,\mathrm{d}t$

Réponse. Convergente ssi $(a,b) = (-2,1)$.

Piste. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$: seul $+\infty$ pose problème. Factorisez $\sqrt{t}$ et faites un développement limité en $\frac{1}{t}$ de $\sqrt{1+\frac{1}{t}}$ et $\sqrt{1+\frac{2}{t}}$:

$$f(t) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{\frac{a}{2}+b}{\sqrt{t}} + O(\frac{1}{t\sqrt{t}}).$$

Déterminer un équivalent (si $1+a+b \neq 0$, sinon si $\frac{a}{2}+b \neq 0$).
Résolvez le système obtenu, $f(t) = O(t^{-3/2})$.

Exercice 3

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Réponse. Convergente ssi $\alpha > 1$, et alors la valeur est $\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}$.

Piste. Pour la convergence : si $\alpha \leq 1$, minorez par $\frac{1}{t}$ (pour $t \geq e$). Si $\alpha > 1$, choisissez γ avec $1 < \gamma < \alpha$ et montrez $\frac{\ln t}{t^\alpha} = o(\frac{1}{t^\gamma})$.
Pour la valeur dans le cas de convergence : intégration par parties avec $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \frac{1}{1-\alpha}t^{-\alpha+1}$. On pense à vérifier que la limite de uv est finie en $+\infty$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

Réponse. Convergente, de valeur $4\ln 2 - 4$.

Piste. Pour la convergence. En 0, $f(t) \sim \ln(t)$. En 1, $\ln t \sim -(1-t)$, donc la fonction tend vers 0.
Pour la valeur : changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ (hypothèses à vérifier) pour se ramener à $2\displaystyle\int_0^1 \ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u$, puis séparez $\ln(1-u) + \ln(1+u)$ et intégrez chaque terme (primitive de ln : $x\ln x - x$).

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$

Réponse. Divergente (problème en 0).

Piste. En 0 : déterminer un équivalent.

Exercice 4

Réponse. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Piste. Convergence : en 0, $f(t) \sim \ln t$; en $+\infty$, $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^2} = o\big(t^{-3/2}\big)$.
Valeur : posez $u = \frac{1}{t}$ (hypothèses à vérifier) et exprimez I avec les mêmes fonctions de u. Vous trouvez une relation du type $I = -I$.

Exercice 5

Réponse. $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout polynôme P.

Piste. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$.
En $+\infty$: $P(t)$ est équivalent à son monôme de plus haut de degré, puis par croissances comparées, $P(t)e^{-t} = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$.

Exercice 6

Réponse. F est définie sur $]-1, +\infty[$.

Piste. On étudie $\dfrac{t^x - 1}{\ln t}$ sur $]0, 1[$.

- En 1 : $t^x - 1 = e^{x\ln t} - 1 \sim x \ln t$: la fonction se prolonge par continuité.
- En 0 : si $x \geq 0$, la fonction est bornée (voire tend vers 0) ; si $x < 0$, la fonction est équivalente à $\frac{t^x}{\ln t}$. Comparez à Riemann pour $x > -1$, puis traitez séparément $x = -1$ (intégrale de $\frac{1}{t\ln t}$: trouvez une primitive) et $x < -1$.

Exercice 7

1. **Réponse.** I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Piste. La fonction est paire et continue. Croissances comparées : $x^{2n}e^{-x^2/2} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$.

2. **Réponse.** $I_{n+1} = (2n+1)I_n$, d'où $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Piste. Écrivez $x^{2n+2}e^{-x^2/2} = x^{2n+1} \cdot \big(xe^{-x^2/2}\big)$ et intégrez par parties (primitive de $xe^{-x^2/2}$: $-e^{-x^2/2}$). Travaillez sur $[-A, A]$ et faites tendre $A \to +\infty$ (le crochet tend vers 0). Pour I_0 : changement de variable $x = \sqrt{2}\,u$ à partir de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. Ensuite récurrence.

Exercice 8

1. **Réponse.** $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

   Piste. En 0 : développement limité du numérateur, la fonction a une limite finie. En $+\infty$: majorez par $\frac{e^{-t}}{t}$ ou par e^{-t} pour $t \geq 1$.

2. **Réponse.** $\displaystyle I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

   Piste. Pour $\varepsilon > 0$, séparez $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (chacune converge). Dans la seconde, posez $u = 2t$. La différence devient une intégrale sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$. Pour la limite : sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, encadrez e^{-t} entre $e^{-2\varepsilon}$ et 1, et calculez $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Théorème des gendarmes.

Exercice 9

1. **Réponse.** f est intégrable sur $]0, 1]$ car elle se prolonge par continuité en 0 (limite $-\frac{2}{3}$).

   Piste. Développement limité de $\operatorname{Arctan} t$ à l'ordre 3 en 0 : $\operatorname{Arctan} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$. Élevez au carré, factorisez t^2, puis inversez avec $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$. Montrez que $f(t)$ a une limite finie en 0.

2. **Réponse.** $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{Arctan}^2 t} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

   Piste. Écrivez $\frac{1}{\operatorname{Arctan}^2 t} = \frac{1}{t^2} - f(t)$. Intégrez sur $[x, 1]$. Le premier morceau vaut $\frac{1}{x} - 1$; le second a une limite finie quand $x \to 0^+$ (d'après 1). Que dire de la somme face à $\frac{1}{x}$?

Exercice 10

1. **Réponse.** $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

   Piste. Dérivez $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et évaluez en $x = 1$.

2. **Réponse.** $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

   Piste. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$: $0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}$, donc majorez par un multiple de $\frac{t}{(1+t^2)^2} \sim \frac{1}{t^3}$.

3. **Réponse.** F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, $F'(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ et $F(x) = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4(1+x^2)}$.

   Piste. Notez $g(t) = \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}$ et G une primitive de g : alors $F(x) = G(x) - G(1/x)$, composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. Dérivez : $F'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2} g(1/x)$. Remplacez $g(1/x)$ par son expression, simplifiez : vous pouvez factoriser par $x\,[\arctan x + \arctan \frac{1}{x}]$ et utiliser la question 1. Primitive de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$: $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. La constante est fixée par $F(1) = 0$.

4. **Réponse.** $I = \dfrac{\pi}{8}$.

   Piste. $I = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ (pourquoi ? : $\int_{1/x}^{x} \to \int_0^{+\infty}$ car l'intégrale converge).

Exercice 11

1. **Réponse.** $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

   Piste. Continuité sur $\mathbb{R}_+$ puis en $+\infty$ ($e^{-x^2} = o(1/x^2)$)

2. Intégrales de Wallis.

   (a) **Réponse.** $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$, et $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour $n \geq 1$.

   Piste. Écrivez $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ et intégrez par parties (dérivée de $\sin^{n-1}$: $(n-1)\sin^{n-2}\cos$). Remplacez $\cos^2 = 1 - \sin^2$.
   Pour la seconde relation : posez $u_n = n I_n I_{n-1}$ et montrez que $u_n = u_{n-1}$ avec la relation précédente. Calculez $u_1 = I_1 I_0$.

   (b) **Réponse.** (I_n) est strictement positive et décroissante.

   Piste. Pour la décroissance étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$.
   Pour la stricte positivité : intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle (on utilise le théorème de nullité de l'intégrale)

   (c) **Réponse.** $I_n \sim I_{n-1}$ et $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

   Piste. Divisez $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$ par $I_n > 0$, utilisez 2.a) pour exprimer $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, puis théorème des gendarmes.
   Puis $n I_n I_{n-1} \sim n I_n^2$ et $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

3. **Réponse.** $J_n = I_{2n+1}$ et $K_n = I_{2n-2}$ (pour $n \geq 1$).

   Piste. Pour J_n : posez $x = \cos t$ ($\sin^{2n+1}$ apparaît). Pour K_n : $x = \tan t$, donc $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ et $\frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$.
   Vous obtenez $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t$, puis le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ pour revenir à sin.

4. **Réponse.** $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et, pour $n \geq 2$, $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

   Piste. Pour l'encadrement : $e^u \geq 1 + u$ appliqué à $u = -x^2$, puis à $u = x^2$ (et inversion).
   Pour la suite : posez $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$, élevez l'encadrement à la puissance n (attention : valable car $1 - x^2 \geq 0$ pour $x \in [0,1]$), intégrez sur $[0, \sqrt{n}]$ après le changement de variable, et utilisez J_n, K_n. Pour la borne supérieure, majorez $\int_0^1$ par $\int_0^{+\infty}$.

5. **Réponse.** $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   Piste. Équivalents de I_{2n+1} et I_{2n-2} d'après 2.c) : chacun des deux membres de l'encadrement tend vers la même limite quand $n \to +\infty$. Concluez par gendarmes.

Exercice 12

1. **Réponse.** $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (sans être absolument convergente).

   Piste. En 0 : $\frac{\sin t}{t} \to 1$.
   En $+\infty$: intégrez par parties avec $u(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = -\cos t$. La condition du croche est vérifiée $u(t)v(t) \to 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. **Réponse.** $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Piste. Minorez $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ en remplaçant $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{(k+1)\pi}$ et en calculant $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$. Obtenez une minoration par le terme général de la série harmonique.

3. **Réponse.** $I > 0$.

   Piste. Découpez $\int_0^{N\pi}$ en N morceaux $[n\pi, (n+1)\pi]$ et changez de variable $t \mapsto n\pi + t$ dans chacun ($\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin t$). Posez $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t$: montrez que (a_n) est positive, décroissante, de limite nulle. Critère des séries alternées : quel est le signe de la somme ? (comparez à $a_0 - a_1$).

4. **Réponse.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t$.

   Piste. Sur $[\varepsilon, X]$, intégrez $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ par parties avec $u = \sin^2 t$, $v' = \frac{1}{t^2}$; utilisez $2\sin t\cos t = \sin(2t)$. Vérifiez que les termes de bord tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et $X \to +\infty$. Puis changement de variable $u = 2t$ dans $\int \frac{\sin 2t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Suppléments

Exercice 13

1. **Réponse.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Piste. Dérivabilité en 0 avec $f(0) = 0$ signifie $\frac{f(t)}{t} \to f'(0)$. Déduisez qu'il existe M et $\delta > 0$ tels que $|f(t)| \leq Mt$ sur $]0, \delta]$. Majorez alors $\frac{|f(t)|}{t^{3/2}}$ par $\frac{M}{\sqrt{t}}$. Sur $[\delta, 1]$: continuité.

2. **Réponse.** Si $f'(0) \neq 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Piste. $\frac{f(t)}{t^2} \sim \frac{f'(0)}{t}$ en 0. Cette fonction est de signe constant au voisinage de 0 ; comparez à Riemann.

Exercice 14

1. **Réponse.** Pour $x \geq 0$: $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\{x\}(\{x\} - 1)}{2} \in \big[-\tfrac{1}{8}, 0\big]$: cette quantité est **bornée** et 1-périodique en x.

   Remarque : elle ne tend pas vers 0 (par exemple en $x = n + \frac{1}{2}$ elle vaut $-\frac{1}{8}$). Ce qui est vrai, et utile pour la suite, est que $Q(x) = \int_0^x q(t)\,\mathrm{d}t$ est 1-périodique et bornée ($\int_0^1 q = 0$). Vérifiez l'énoncé de votre version.

   Piste. Sur $[\lfloor x \rfloor, x]$, $q(t) = t - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$. Posez $s = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ et calculez l'intégrale d'une fonction affine. Étudiez ensuite le signe et la périodicité du résultat en s.

2. **Réponse.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1$.

   Piste. Calculez $\int_1^N \frac{q(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $N \in \mathbb{N}^*$. Découpez en $\int_k^{k+1}$: sur chacun, $\lfloor t \rfloor = k$, donc $\int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = k \ln \frac{k+1}{k}$. Faites une transformation d'Abel (réindexation) pour obtenir $\sum_{k=1}^{N-1} k \ln \frac{k+1}{k} = (N-1)\ln N - \ln((N-1)!)$. Vous obtenez une expression en N, $\ln N!$ et $\ln N$: appliquez la formule de Stirling. N'oubliez pas : l'intégrale converge déjà (intégration par parties avec Q périodique bornée), donc on peut passer à la limite le long de $N \in \mathbb{N}$.

3. **Réponse.** Non : $t \mapsto \frac{q(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

   Piste. Calculez $\int_0^1 |s - \frac{1}{2}|\,\mathrm{d}s$ (vaut $\frac{1}{4}$). Sur $[n, n+1]$, minorez $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{n+1}$ et comparez à la série harmonique.

Exercice 15

1. **Réponse.** F est T-périodique.

   Piste. Calculez $F(x+T)-F(x)$. Utilisez la propriété : $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$ pour une fonction T-périodique.

2. **Réponse.** I et J convergent et $I = J$.

   Piste. Remarquez que $F' = f - \lambda$ (si f continue). Intégrez par parties $I = \int_T^{+\infty} F'(t)\, t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ sur $[T, X]$. Justifiez : F est périodique et continue donc bornée ; avec $\alpha > 0$, $\frac{F(X)}{X^\alpha} \to 0$; et $\frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable par comparaison à Riemann. Calculez $F(T)$ (que vaut-il ?).

Exercice 16

Réponse. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (convergence en $+\infty$ de l'intégrande).
Piste. Pour $x > 0$, l'intégrande est continue sur $[x, +\infty[$. En $+\infty$: $e^{\sqrt{t}} - 1 \sim e^{\sqrt{t}}$, donc la fonction est $o\big(\frac{1}{t^2}\big)$.

1. **Réponse.** $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x\,(e^{\sqrt{x}}-1)}$.

   Piste. Relation de Chasles avec un point fixe, par exemple 1 : $f(x) = f(1) + \int_x^1 \cdots = f(1) - \int_1^x \cdots$; théorème fondamental de l'analyse (intégrande continue).

2. **Réponse.** $e^u - 1 \geq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

   Piste. Étudiez $u \mapsto e^u - 1 - u$ (dérivée, variations), ou convexité de l'exponentielle (tangente en 0).

3. **Réponse.** $u_0 = 2\ln 2$ convient : $e^u - 1 \geq e^{u/2}$ pour $u \geq u_0$.

   Piste. Ramenez-vous à $e^{u/2}\big(e^{u/2}-1\big) \geq 1$: factorisez $e^u - e^{u/2}$ et utilisez que $e^{u/2} \geq 2$ pour u assez grand.

4. **Réponse.** f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Piste. f est continue et positive. Deux bornes à étudier.

   - Au voisinage de 0 : avec 2), $\frac{1}{t(e^{\sqrt{t}}-1)} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, donc pour $x \in]0,1]$, $f(x) \leq f(1) + \int_x^1 t^{-3/2}\,\mathrm{d}t \leq f(1) + \frac{2}{\sqrt{x}}$: intégrable en 0 car $\frac{1}{\sqrt{x}}$ l'est.
   - Au voisinage de $+\infty$: avec 3), pour $x \geq u_0^2$, l'intégrande est $\leq \frac{e^{-\sqrt{t}/2}}{t} \leq e^{-\sqrt{t}/2}$ (pour $t \geq 1$). Posez $u = \sqrt{t}$ pour calculer $\int_x^{+\infty} e^{-\sqrt{t}/2}\,\mathrm{d}t$: vous obtenez $(4\sqrt{x}+8)e^{-\sqrt{x}/2}$, qui est $o\big(\frac{1}{x^2}\big)$.

Exercice 17

1. **Réponse.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

   Piste. Changement de variable $u = \sqrt{x}$: l'intégrale devient $2\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$. Utilisez l'exercice 12.

2. **Réponse.** f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

   Piste. Calculez $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x^{3/2}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}$. Majorez $|f'|$ par une somme de deux fonctions de Riemann intégrables en $+\infty$.

3. (a) **Réponse.** $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 2$.

   Piste. Intégration par parties : $u(t) = n-1-t$ (dérivée -1), $v = f$. Calculez le crochet en $t = n-1$ et $t = n$.

   (b) **Réponse.** $\sum f(n)$ converge.

   Piste. Pour $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| \leq 1$: donc $|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'|$, terme général d'une série convergente (d'après 2). Ensuite, $\sum_{n=2}^N w_n = \int_1^N f - \sum_{n=2}^N f(n)$: isolez $\sum f(n)$ et utilisez la convergence de $\int_1^N f$ quand $N \to +\infty$ (question 1).