Exercice 1. (♡) Soit $E = \mathbb{K}^n$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

1) Montrer que ce sont des normes.
2) Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \qquad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1.$$

Que déduire des trois normes?

Exercice 2. (♡) On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On rappelle : $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$.

1) Montrer $\|\cdot\|_1$ définit une norme sur E.
2) Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
3) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivlentes. *Indication: on pourra chercher une suite (f_n) de fonctions vérifiant que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que $\|f_n\|$ ne tend pas vers 0.*

Exercice 3. (♡♡) On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$,

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1) Montrer $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2) Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
3) Démontrer qu'il n'existe aucune constante K telle que, pour toute fonction $f \in E$, on ait $\|f\| \leqslant K\|f\|_\infty$. *Indication: on pourra chercher une suite (f_n) de fonctions vérifiant que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que $\|f_n\|$ ne tend pas vers 0 (penser à des oscillations de plus en plus rapides).*

Exercice 4. (♡)

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de $N(P)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
2) Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. (♡♡)

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)|e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de $N(P)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
2) Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. (♡♡) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Montrer que M est la matrice d'un projecteur.
Indication : quelle est la limite de la suite $(A^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. (♡♡) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose $(AB)^n \to O_p$. Montrer que $(BA)^n \to O_p$.

Exercice 8. (♡) Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose

$$A_n \to A \text{ et } A_n^{-1} \to B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9. (♡♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2) En déduire que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Exercice 10. (♡) Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi : pour tout i, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = -1) = q = 1 - p$ avec $p \in]0;1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \begin{pmatrix} P(Z_n = 1) \\ P(Z_n = -1) \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.
2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$.
Démontrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans cette base; cette matrice sera notée D.
3) Démontrer que la suite (A^n) converge (sans chercher à déterminer sa limite).
4) Démontrer que la suite (U_n) converge; on note L sa limite.
5) Montrer que $L = AL$ puis déterminer L.

Exercice 11. (∗) On considère deux suites (u_n), (v_n) et (w_n) réelles définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (u_n v_n)^T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que la suite (X_n) vérifie une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$.
2) Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $||AX||_\infty \leqslant k||X||_\infty$ où k est un réel de $]0;1[$.
3) Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
4) Donner une majoration de $||X_n - L||_\infty$ et conclure quant à la convergence de (X_n).

Suppléments 5/2

Exercice 12. (∗) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E.
On définit une application N par : $\forall x \in E, N(x) = \|f(x)\|$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur f, pour que N définisse une norme sur E.

Exercice 13. (∗∗) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad |\ f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Démontrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
Indication : si x est un vecteur appartenant à $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$, on pourra choisir un vecteur $a \in E$ tel que $x = f(a) - a$ et commencer par démontrer que, pour tout entier n, on a $f^{n+1}(a) - f^n(a) = x$.